SÉRIE A, N° CNRS AO 8443
N° D'ORDRE : 1134

THÈSES

PRÉSENTÉES

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Alain BOURGINE

1ère THÈSE : Sur une approche statistique de la dynamique vibratoire des structures.

2e THÈSE : L'utilisation des techniques numériques pour la fabrication et la restitution d'hologrammes.

Soutenues le 25 mai 1973 devant la Commission d'examen

MM.	CASTAING	Président
	MAZET	Examinateurs
	ALAIS	
	COUPRY	
	PERULLI	Invité

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON
1973

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543927_0004

SÉRIE A, Nº CNRS AO 8443
Nº D'ORDRE : 1134

THÈSES

PRÉSENTÉES

A L'UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, CENTRE D'ORSAY

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Alain **BOURGINE**

1ère THÈSE : Sur une approche statistique de la dynamique vibratoire des structures.

2e THÈSE : L'utilisation des techniques numériques pour la fabrication et la restitution d'hologrammes.

Soutenues le 25 mai 1973 devant la Commission d'examen

MM.	CASTAING	Président
	MAZET	Examinateurs
	ALAIS	
	COUPRY	
	PERULLI	Invité

O.N.E.R.A.
29, Avenue de la Division Leclerc,
92 CHATILLON
1973

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Les travaux qui sont à l'origine de la présente thèse ont débuté à l'ONERA sous l'impulsion du professeur **R. Mazet**, *qui a bien voulu accepter d'en suivre le développement et m'apporter le soutien constant de ses conseils et de ses encouragements. Je lui exprime ma reconnaissance, et mes sentiments de respectueux attachement.*

Je remercie les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et les fructueuses discussions dont il a bénéficié : le professeur **R. Castaing**, *qui m'a fait l'honneur de présider le jury et qui, en tant que Directeur Général de l'ONERA, a permis l'existence de cette étude ; le professeur* **R. Mazet**, *le professeur* **P. Alais**, *le docteur* **G. Coupry** *et le docteur* **M. Perulli**.

Je suis également très heureux de pouvoir dire ici tout le prix que j'attache à la confiance que m'a témoignée **G. Coupry**, *Directeur Scientifique à la Direction Résistance des Structures de l'ONERA, et aux progrès que ses critiques et suggestions m'ont permis d'accomplir. J'exprime aussi ma profonde gratitude à* **L. Gourbil, G. Le Deunff, J. Sagot** *et* **F. Le Goff** *qui ont apporté avec gentillesse tous leurs soins et leurs compétences à la réalisation des expériences et à la programmation des calculs numériques, ainsi qu'à* **R. Valid** *et* **J. Boujot** *qui ont eu l'amabilité de relire le manuscrit original et de me faire part de précieuses suggestions.*

Enfin, je tiens à remercier l'ONERA, et tout particulièrement son Service Editions, qui a apporté tous ses soins à la réalisation matérielle de ce document.

TABLE DES MATIÈRES

pages :

RÉSUMÉ 4

ABSTRACT 5

INTRODUCTION 6

PRINCIPAUX SYMBOLES ET NOTATIONS 9

Chapitre I : RÉPONSE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE A DES SOLLICITATIONS ALÉATOIRES 11

1. HYPOTHÈSES ET DÉFINITIONS 11

1,1. Description probabiliste de l'excitation 11

1,2. Hypothèses relatives au comportement du système 12

1,3. Relations de Fourier. Densités spectrales de puissance 12

2. RELATIONS ENTRÉE-SORTIE (SYSTÈMES DISCRETS) 13

2,1. Quadripôle linéaire (rappel) 13

2,2. Système comportant deux entrées 15

3. CARACTÉRISTIQUES STATISTIQUES DE LA RÉPONSE D'UN SYSTÈME CONTINU 18

3,1. Expression intrinsèque 18

3,2. Expression dans la base modale 19

3,2.1. Spectre de puissance 19

3,2.2. Energie cinétique totale du système 20

3,2.3. Niveaux quadratiques moyens 21

3,2.4. Moyennes fréquencielles. Etude globale 22

4. FONCTION DE GREEN GÉNÉRALISÉE 23

4,1. Equations locales des caractéristiques statistiques de la réponse 24

4,2. Concept de fonction de Green généralisée 25

4,2.1. Interprétation physique 25

4,2.2. Etude expérimentale directe 26

4,2.3. Excitations non corrélées 26

4,3. Recherche d'un modèle mathématique 27

4,3.1. Caractère statistique de l'étude structurale 27

4,3.2. Estimations des caractéristiques statistiques 28

Chapitre II : APPROCHE GLOBALE DE LA DYNAMIQUE VIBRATOIRE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE 30

1. ORIGINE DES MÉTHODES GLOBALES 30

2. DENSITÉ MODALE EN ACOUSTIQUE ET EN PHYSIQUE STATISTIQUE 31

2,1. Considérations générales 31

2,2. Modes propres d'une enceinte parallélépipédique 32

2,3. Densité modale de l'enceinte 33

2,4. Distribution angulaire de la densité modale 34

2,5. Enceinte réverbérante 35

2,5.1. Le modèle théorique 35

2,5.2. Corrélations spatiales 35

2,6. Densité modale en physique statistique 37

3. LA NOTION DE DENSITÉ MODALE APPLIQUÉE AUX STRUCTURES 38

3,1. Structure localement homogène. Approximation géométrique 38

3,1.1. Propagation d'ondes et densité modale, problème monodimensionnel 38

3,1.2. Remarques : densité modale et temps de parcours de l'énergie 39

3,1.3. Densité d'énergie et masse généralisée 40

3,2. Densité modale d'une structure homogène 40

3,2.1. Propagation d'ondes en milieu indéfini 40
3,2.2. Distribution angulaire de la densité modale 41
3,2.3. Remarques 42
3,2.4. Densité modale 42
3,3. Densité de probabilité de présence d'un mode associé à une direction de propagation donnée 43
4. FONCTION DE TRANSFERT ET ADMITTANCE D'ENTRÉE D'UNE STRUCTURE CONSERVATIVE BIDIMENSIONNELLE INFINIE 43
4,1. Réponse impulsionnelle et fonction de transfert-vitesse 43
4,2. Liaison avec la densité modale d'une structure finie 46
5. ANALYSE GLOBALE D'UNE STRUCTURE BIDIMENSIONNELLE FINIE 46
5,1. Puissance fournie à la structure en régime aléatoire. Admittance d'entrée moyenne 47
5,2. Fonction de Green généralisée et fonction de transfert globale 49
5,2.1. Relations moyennes entre ces deux grandeurs 49
5,2.2. Interprétation - Structure réverbérante 51
6. CARACTÉRISTIQUES GLOBALES DE LA STRUCTURE FINIE 57
6,1. Hypothèse fondamentale 57
6,2. Explicitation du modèle mathématique 58
6,2.1. Expression dans le domaine fréquenciel 58
6,2.2. Expression spatio-temporelle 59
6,2.3. Remarque importante 63

Chapitre III : CARACTÉRISTIQUES DYNAMIQUES GLOBALES DE QUELQUES STRUCTURES EN VIBRATION DE FLEXION 65
1. VIBRATIONS D'UNE MEMBRANE UNIFORMÉMENT TENDUE 65
1,1. Membrane rectangulaire uniformément tendue 66
1,2. Membrane circulaire uniformément tendue 67
2. VIBRATIONS DE FLEXION D'UN PANNEAU PLAN 68
2,1. Densité modale 68
2,2. Fonction de Green généralisée 69
3. VIBRATIONS DE FLEXION D'UN PANNEAU CYLINDRIQUE 69
3,1. Equations du mouvement 69
3,2. Relations de dispersion 71
3,3. Propriétés remarquables 72
3,4. Vitesse de groupe 73
3,5. Densité modale 74
3,6. Fonction de Green généralisée 75
3,6.1. Expression analytique 75
3,6.2. Interprétation physique 77
3,6.3. Expression spatio-temporelle. 78

Chapitre IV : APPLICATION AU CALCUL DU TRANSFERT D'ÉNERGIE ENTRE UNE STRUCTURE RÉVERBÉRANTE ET UN SYSTÈME MÉCANIQUE LINÉAIRE, AVEC LIAISONS PONCTUELLES 80
1. POSE DU PROBLÈME 80
2. ÉQUATIONS DU SYSTÈME COUPLÉ AVEC LIAISON UNIQUE. MÉTHODE DES IMPÉDANCES MÉCANIQUES 81
2,1. Relations entré-sortie 81
2,2. Remarque 82
3. APPLICATION AU CAS D'UN RÉSONATEUR MÉCANIQUE SIMPLE 82
3,1. Fonction de transfert-vitesse d'un résonateur série 83
3,2. Spectre de la puissance transmise et niveau global 83
3,3. Cas d'un système à plusieurs degrés de liberté 85
4. GÉNÉRALISATION AU CAS DE LIAISONS PONCTUELLES MULTIPLES 86

Chapitre V : CONTRÔLE EXPÉRIMENTAL 88

1. OBJET ET CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES 88

2. CHOIX ET DÉFINITION DE LA STRUCTURE 88

2,1. Choix d'un élément cylindrique circulaire mince 88

2,2. Le cylindre d'essai 89

2,3. Equipement de la structure. Moyens de mesure 90

2,3.1. Capteurs de vitesse 90

2,3.2. Excitateurs 91

2,4. Aperçu des caractéristiques modales du cylindre 91

3. LES MOYENS D'ANALYSE SPECTRALE ET TEMPORELLE 93

3,1. Caractéristiques générales 93

3,2. Principe de base 93

3,3. Intégration des résultats partiels. Sortie et traitement des résultats de l'analyse 94

4. APPLICATION DE LA MÉTHODE GLOBALE A L'ÉTUDE EXPÉRIMENTALE D'UN CYLINDRE 95

4,1. Détermination de la densité modale au moyen de la mesure de l'admittance d'entrée 95

4,1.1. Principe de l'analyse 95

4,1.2. Résultats 96

4,1.3. Confrontation avec les résultats théoriques 98

4,1.4. Remarque : correction de masse due à l'excitateur et au capteur de mesure 99

4,2. Spectres de puissance. Modèle de dissipation 100

4,3 Mesure de la fonction de Green généralisée du cylindre. Représentation dans le domaine spectral 101

4,3.1. Principe de la mesure 101

4,3.2. Résultats. Confrontation théorie-expérience 102

4,4. Mesure de la fonction de Green généralisée du cylindre. Représentation dans le domaine temporel 104

4,4.1. Principe de la mesure 104

4,4.2. Résultats. Confrontation théorie-expérience 104

5. PRÉVISION DE LA RÉPONSE A UNE EXCITATION ALÉATOIRE 106

5,1. Principe du contrôle global 106

5,2. Résultats. Confrontation théorie-expérience 107

Chapitre VI : CONCLUSIONS 109

Annexe : COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DU PROBLÈME DES VIBRATIONS LIBRES D'UNE STRUCTURE HOMOGÈNE OU NON (APPROXIMATION GÉOMÉTRIQUE) 111

1. INTRODUCTION 111

2. VIBRATIONS LIBRES D'UNE POUTRE HOMOGÈNE (APPROXIMATION GÉOMÉTRIQUE) 112

3. VIBRATIONS LIBRES D'UNE POUTRE NON HOMOGÈNE (APPROXIMATION GÉOMÉTRIQUE) 114

3,1. Formes propres asymptotiques 114

3,2. Structure homogène de référence 116

3,3. Densité modale 117

3,4. Densité modale et vitesse de groupe 118

3,5. Masse généralisée asymptotique 119

3,6. Exemple 119

4. GÉNÉRALISATION 121

4,1. Remarque fondamentale 121

4,2. Plaque non homogène en flexion 122

4,3. Cas général 126

4,4. Choix de fonctions propres asymptotiques sinusoïdales 127

5. CONCLUSION 130

RÉFÉRENCES 131

SUR UNE APPROCHE STATISTIQUE DE LA DYNAMIQUE VIBRATOIRE DES STRUCTURES

par Alain BOURGINE

RÉSUMÉ

L'analyse de la dynamique vibratoire d'une structure linéaire fait ici appel à une méthode non modale, de caractère asymptotique et statistique. Elle repose sur l'étude des conditions de propagation de paquets d'ondes (dans l'approximation géométrique) et, en s'affranchissant de la notion de système déterministe, elle décrit les propriétés moyennes de ce champ vibratoire à l'aide des concepts fondamentaux de densité modale et de fonction de Green généralisée.

On étend les résultats classiques du calcul de la densité modale au cas des milieux localement homogènes. Puis on établit ou on généralise les relations qui unissent la densité modale à la vitesse de groupe et à l'admittance d'entrée d'une structure.

Le concept de fonction de Green généralisée, dont le sens physique est simple, permet d'exprimer les caractéristiques statistiques de réponse de la structure excitée en régime aléatoire. En utilisant des analogies remarquables avec l'acoustique des salles, une idéalisation du problème aboutit à un modèle physique de cette fonction. Son expression mathématique est explicitée pour des membranes et panneaux plans ou cylindriques. Une application au transfert d'énergie entre une structure «réverbérante» et un système mécanique, attaché en des points discrets, est ensuite présentée.

Les résultats d'une étude expérimentale sur un cylindre mince, qui complètent l'exposé, sont dans l'ensemble en bon accord avec ceux de la théorie.

Descripteurs (thésaurus CEDOCAR) : Vibration structure – Vibration aléatoire – Réponse dynamique Analyse dynamique structures – Analyse statistique – Processus aléatoire – Fonction Green – Réverbération.

♦

ON A STATISTICAL APPROACH OF STRUCTURES VIBRATORY DYNAMICS

SUMMARY

The analysis of vibratory dynamics of a linear structure is treated here by a non-modal method, of asymptotic and statistical character. It rests on the study of propagation conditions of wave bursts (in the geometrical approximation) and, being free from the notion of deterministic system, describes the average properties of this vibratory field by means of the fundamental concepts of modal density and of the generalized Green function.

The classical results of the modal density calculation is extended to the case of locally homogeneous media. Then, the relations linking the modal density to the group velocity and the admittance of a structure are established or generalized.

The generalized Green function concept, whose physical meaning is simple, permits us to express the statistical characteristics of the response of a structure excited in random regime. By using remarkable analogies with room acoustics, an idealization of the problem results in a physical model of this function. Its mathematical expression is made explicit for membranes and flat or cylindrical panels. An application to energy transfer between a "reverberant" structure and a mechanical system, attached at discrete points, is then presented.

The results of an experimental study on a thin cylinder, which close the paper, are in good general agreement with theoretical ones.

Descriptors (NASA thesaurus) : Structural vibration – Random vibration – Dynamic response – Dynamic – Dynamic structural analysis – Statistical analysis – Random processes – Green function – Reverberation.

ABSTRACT

Many problems in structural vibratory mechanics are characterized by the existence of natural, often random loads, covering a broad spectral range (typically several thousand Hertz), liable to generate forced responses that may jeopardize the structure mechanical resistance. In these conditions, the modal method, which enjoyed remarkable success, at low frequencies, in the dynamic study of vibrating linear systems, meets with considerable difficulty when its traditional application field is extended toward the higher part of the spectrum. It is then necessary to call upon more global analysis methods, of asymptotic and statistical character.

This double viewpoint is the basis of this study. On the one hand, its field of application is defined by the validity conditions of the geometrical approximation (in the electrodynamic sense : the vibration wavelengths are small relative to all structure dimensions or, in inhomogeneous medium, relative to the characteristic scale of elastic and massic parameters) ; on the other hand, by doing away with the concept of deterministic system, the theory intends to describe, in terms of "average" (by frequency bands), the dynamic characteristics of "wave bursts" propagating within the structure. By this very process, the mathematical representation becomes indifferent to the boundary conditions of the problem, and the study of vibration propagation in indefinite medium may shed light on some results of the statistical analysis of the finite dimensions real medium vibratory characteristics.

The study of the modal density concept, of current use in other fields of physics, follows the work already done by several authors in the case of simple, homogeneous structures. After an extension of the theory to the case of locally homogeneous media, we establish or generalize the relations linking the modal density to the group velocity and to the input admittance of an indefinite structure for the vibrations considered. Moreover, in the case of a finite dimensions medium, we show that in spatial averaging the input admittance is linked very simply to the modal density.

The concept of generalized Green function of a linear dissipative structure, introduced by the author, permits us, by means of an integral relation, to express the statistical characteristics of the structure response under the effect of a distribution of second order random stationary loads. This function possesses a simple physical meaning, easily accessible experimentally : it can be interpreted in terms of reciprocity as the crossed spectral density of response to a random point load, of uniformed spectrum normed to unity. Within the framework of the previously mentioned approximations, and taking advantage of remarkable analogies with room acoustics, an idealization of the problem ends up as a physical model of the generalized Green function. This idealization rests mainly on the assumption of energy equipartition among the natural modes of a given bandwidth, and on the concept of reverberant vibratory field. More precisely, we show that this field is generally dispersive and directive, this property being controlled by the probability density of wave incidence in a given direction of space.

We then have at our disposal an approximate mathematical representation that is general enough to describe various concrete situations. Application to problems of membranes, or plane or cylindrical panels vibrating in bending, shows that we may obtain relatively simple explicit solutions. The interest of the proposed model is illustrated by the problem of vibratory energy transfer between a "reverberating structure" and a linear mechanical system with one or several degrees of freedom, attached to the structure in discrete points.

The main results of an experimental study on a thin and homogeneous circular steel cylinder completes the paper. Generally speaking, within the Donnell approximations for the wall bending vibrations, the predictions of the theoretical analysis are satisfactorily confirmed by the measurements made in the 0–2000 Hz range. Lastly, a calculation of the spectral distribution of the cylinder response to random excitation loads, also well verified experimentally, permits us to expect that the statistical approach of structural vibratory dynamics will contribute to solve a broad class of industrial problems.

INTRODUCTION

Depuis une douzaine d'années, des exigences nouvelles formulées par les industries de pointe en construction mécanique ont offert un vaste champ d'activités aux spécialistes de la mécanique appliquée. En particulier, sous l'impulsion des programmes spatiaux, la résolution des problèmes relatifs au comportement dynamique et à la résistance des structures du véhicule, au cours des phases successives de sa mission, est devenue une tâche de première urgence : on sait, en effet, que plusieurs tentatives de lancements ont échoué, dans les premières années 1960, par suite de défaillances structurales provoquées par les vibrations. Très schématiquement, on peut dire que ces problèmes se caractérisent par l'existence d'excitations aléatoires «dans l'espace et dans le temps», couvrant un domaine spectral étendu, et provoquées par des fluctuations de pression pariétales d'origine acoustique (bruits de jet) ou aérodynamique (couche limite turbulente ou instabilités et décollements du régime transsonique). Leur étude devait donc nécessairement mettre en relation étroite les disciplines de la mécanique des vibrations aléatoires, de l'acoustique et de l'aérodynamique.

Du point de vue de la mécanique vibratoire d'un système supposé déterministe et linéaire, une telle entreprise pouvait être abordée avec confiance en s'appuyant sur les méthodes théoriques ou expérimentales éprouvées qui permettaient de connaître les caractéristiques dynamiques du système mécanique. L'existence d'un spectre d'excitation riche aux fréquences élevées ne semblait pas devoir entraîner de difficultés particulières. Dans la mesure où l'on était en présence d'un problème de réponse forcée, la connaissance des propriétés statistiques de l'excitation permettait en effet d'expliciter celles de la réponse du système, par exemple en termes de superposition des réponses suivant chaque mode propre. Le travail de *Powell* [1] présente une synthèse des travaux théoriques entrepris suivant cette voie, que nous appellerons l'approche modale [2, 3].

Ce projet devrait rapidement rencontrer des difficultés considérables du point de vue pratique. Si les méthodes théoriques ou expérimentales classiques permettaient en effet de déterminer aisément les caractéristiques modales d'un système déterministe linéaire aux fréquences basses (de l'ordre de quelques centaines de hertz au maximum), il n'en n'était plus ainsi dans les gammes supérieures du spectre. Malgré leur puissance, multipliée par l'apparition d'ordinateurs de performances élevées, les méthodes de calcul des structures en dynamique (méthodes par éléments finis ou autres) ne permettaient pas de couvrir le domaine spectral nécessaire, s'étendant au delà de 2000 Hz dans les cas les plus fréquents. D'autre part, les méthodes expérimentales se révélaient également limitées, pour des raisons techniques ou technologiques, au relevé des premiers modes des structures à traiter. Les unes et les autres devaient en outre se heurter au phénomène d'accumulation des fréquences propres dans des bandes de fréquences étroites, caractéristique du comportement des structures (et, d'ailleurs, des systèmes vibrant en général) dans la partie haute fréquence du spectre. En définitive, l'approche modale du problème ne se révélait utilisable que pour le traitement d'une faible partie du problème posé.

La recherche d'une solution à cette impasse se développa aux Etats-Unis sous l'impulsion des travaux originaux de *Smith, Lyon* et *Maidanik* [4-6] qui fondèrent une approche nouvelle, connue aujourd'hui sous le nom de «méthode statistique énergétique» [4-11], dont l'application à un cas pratique semble avoir été proposée pour la première fois par *Dyer* [11]. Parallèlement, l'allemand *Heckl* [12], puis le soviétique *Bolotin* [13], proposaient des solutions au problème du calcul de la densité modale de certaines structures (coques minces homogènes), qui rendait compte du phénomène de resserrement des fréquences propres déjà évoqué.

Les idées générales et les modalités de raisonnement qui caractérisent cette tendance font largement appel à des analogies avec des situations comparables dans les domaines de la physique du solide et de l'acoustique. En considérant le problème d'un point de vue global, c'est-à-dire en groupant les modes propres par paquets appartenant à une certaine bande de fréquence, l'analyse gagnait en compréhension ce qu'elle consentait à perdre en finesse : des caractéristiques générales, cachées dans le formalisme détaillé du schéma modal, pouvaient ainsi être révélées et exploitées. Outre l'introduction du concept de densité modale dans l'étude des structures, celle de «structure réverbérante» devait également se révéler intéressante. En particulier, des considérations sur les caractéristiques globales du champ acoustique rayonné par une structure réverbérante (notamment la directivité de ce champ) ont permis de montrer l'intérêt de la détermination -également globale, et mettant en œuvre un principe de réciprocité- de la force généralisée exercée sur les modes de cette structure par un champ acoustique extérieur (la structure étant maintenant considérée comme récepteur). Toutefois, cette notion de force généralisée elle-même montre que la méthode statistique énergétique reste dépendante de l'idée de mode propre : le caractère forfaitaire de son évaluation, pour un champ acoustique donné, sur un mode-type de déformée supposée connue, présente un aspect arbitraire et contredit le point de vue global sur lequel la méthode s'est développée. Enfin, il ne semble pas que, jusqu'à maintenant, cette méthode ait permis d'aboutir, sur des problèmes réels, à des confrontations vraiment probantes entre le calcul et l'expérience.

Les recherches entreprises à l'ONERA par l'auteur s'appuient sur ces tentatives en s'efforçant d'en surmonter les difficultés, les limitations ou l'arbitraire. Elles intègrent notamment l'apport méthodologique de l'approche statistique énergétique en tant qu'étude globale du problème dynamique : de ce point de vue, l'analyse structurale en termes de modes propres sera considérée comme un sous-niveau de représentation, à une échelle d'observation fine, de propriétés que nous cherchons à décrire à une échelle « macroscopique » par rapport à la précédente. Notre contribution se distingue des précédentes, dans ses objectifs par deux traits fondamentaux :

a) elle se dégage de la notion de **système déterministe** pour aborder l'étude des caractéristiques structurales, en régime dynamique, d'un **point de vue probabiliste** ;

b) d'une manière systématique, et aussi cohérente que possible, elle substitue à la notion de mode la notion de **fonction de Green généralisée** et, plus précisément, la recherche d'un **modèle mathématique de cette fonction** en s'appuyant sur des bases physiques aussi précises que possible.

Soulignons dès maintenant que le domaine de validité de nos résultats est celui pour lequel les longueurs d'onde des vibrations libres sur la structure Σ_o sont petites devant toutes les dimensions de celle-ci (ou, plus généralement le domaine où un grand nombre de nœuds et de ventres des déformées modales existent sur Σ_o). Ceci peut donc se produire à des **fréquences relativement basses** si les dimensions de Σ_o sont grandes. Malgré cela, par commodité de langage ici abusive, on se réfère souvent à ce domaine de validité de la théorie comme à celui des « hautes fréquences ».

Ce document présente une tentative de synthèse des résultats obtenus par l'auteur en suivant ces lignes générales [14, 15]. C'est la mise en évidence du concept de « **fonction de Green généralisée** » et surtout de sa **signification physique** qui fait intervenir un **principe de réciprocité** original- proposée par nous-même en 1957 [14]qui a permis de fonder l'approche nouvelle du problème de l'étude dynamique d'une structure, en vue du calcul des caractéristiques statistiques de sa réponse à des excitations aléatoires. Conçue à l'origine comme méthode globale mixte, c'est-à-dire semi-expérimentale, elle pouvait prétendre établir les liaisons nécessaires avec la « méthode énergétique », notamment sur le plan de la justification expérimentale de celle-ci. En outre, et indépendemment des vicissitudes de la théorie, elle permettait en principe de mesurer **directement**, sur une structure aussi complexe que possible -pourvu qu'elle fut linéaire- toutes les grandeurs nécessaires à la prévision de sa réponse à un champ de forces aléatoire connu (au sens statistique). Cette particularité, essentielle du point de vue des applications, a permis de développer la recherche, d'abord sur un plan expérimental, puis, sur le plan théorique, en tant que méthode nouvelle autonome.

• Le chapitre I présente le problème et établit les bases mathématiques qui justifient l'appellation de **méthode de la fonction de Green généralisée.** Après un rappel des relations entrée-sortie des systèmes linéaires discrets, soumis à des excitations aléatoires stationnaires du second ordre, on met en évidence le principe de réciprocité qui est essentiel à la compréhension de la méthode générale. On exposera ensuite, dans le cas de systèmes continus, les résultats classiques exprimant les relations entrée-sortie en termes de développement en série suivant les modes propres. Des remarques fondamentales permettent de comprendre la légitimité du choix d'un point de vue probabiliste dans l'étude structurale. La dernière partie du chapitre est consacrée à la fonction de Green généralisée, exprimée dans les domaines spatio-temporel ou spatio-frequentiel. On démontre que cette fonction est bien solution élémentaire d'un opérateur différentiel, aux dérivées partielles suivant les variables d'espace et de temps. Cet opérateur est défini aisément à partir des équations du mouvement du système étudié.

• Le chapitre II est relatif à l'« approche globale » proprement dite. Il présente les développements nécessaires à l'obtention d'un **modèle mathématique** de la fonction de Green généralisé, c'est-à-dire plus précisément l'expression mathématique d'une **idéalisation du phénomène physique réel**, valable pour des structures homogènes ou simplement localement homogènes. Le concept de **densité modale** est introduit par un rappel des résultats classiques en acoustique (cf. par exemple *Morse* [16]) et en physique des solides (cf. *Castaing* [17]). La notion d'enceinte réverbérante et la représentation mathématique des corrélations spatio-temporelles de la pression qui y règne fournissent, par analogie, le support de l'étude correspondante sur une structure. Le calcul de la densité modale est ensuite présenté dans le cas d'une structure homogène : grâce aux développements présentés en annexe, ces résultats, comme ceux qui suivent, sont également valables en milieu localement homogène. La caractéristique essentielle de ce calcul réside dans son indifférence par rapport aux conditions aux limites réelles du problème. Le passage du discret au continu, réalisé par l'introduction de la notion de densité modale, permet alors en même temps de raisonner sur les propriétés d'un milieu **indéfini**, obéissant localement aux mêmes équations du mouvement que la structure réelle. Il est alors possible de parler de la densité de probabilité de présence d'un mode de la structure finie, à la fréquence f , dans une direction donnée de l'espace des nombres

d'ondes. On démontre de même que **le rapport de la densité modale à la masse totale d'une structure est indépendant des dimensions de celle-ci et exprime directement la partie réelle de l'admittance d'entrée de la structure indéfinie** associée (ce qui fournit un moyen de mesure direct de la densité modale). En outre, le lien qui unit la densité modale à la vitesse de propagation de l'énergie est mis en évidence. On démontre que la densité modale d'une structure exprime un temps caractéristique de propagation de cette énergie.

Enfin, en utilisant pour la dernière fois le formalisme du schéma modal, puis en effectuant des moyennes fréquencielles et spatiales, dont le sens physique est indiqué, on montre que la fonction de Green généralisée «moyenne» est, sous des hypothèses très réalistes, proportionnelle au coefficient de corrélation spatiale instantanée, à la fréquence f ,du «champ vibratoire réverbérant» régnant dans la structure à cette fréquence. On montre que ce champ révervérant est en réalité un champ **directif**, cette propriété étant gouvernée par la densité de probabilité de présence des modes dans une direction donnée de l'espace des vecteurs d'onde, et en dernière analyse par les caractéristiques dispersives du milieu pour les vibrations considérées. On dispose ainsi de tous les éléments nécessaires à la construction du modèle mathématique global : une hypothèse, analogue à l'hypothèse d'ergodicité pour les processus aléatoires, permet de s'affranchir de la notion de moyenne spatiale de la fonction de Green. Cette hypothèse est d'autant plus justifiée que la densité modale est élevée.

La fonction de Green généralisée s'exprime alors comme le produit

- **de la densité modale,**
- **du spectre d'amplitude-crête du système attaqué successivement à la résonance de chacun de ses modes.** (Ce spectre est en réalité un spectre moyen mettant en jeu les dissipations dans chaque bande de fréquence),
- **du coefficient de corrélation spatial instantanée de la structure «réverbérante», à la fréquence f .**

L'expression spatio-temporelle de ces résultats, utilisant un calcul approché par la méthode de la phase stationnaire, complète l'exposé de cette approche globale.

La majeure partie de ces deux chapitres est à notre connaissance, et sauf indication contraire du texte, une contribution originale à l'étude de ce problème.

• Un certain nombre d'exemples d'application de la méthode globale à des structures vibrant en flexion sont proposés dans le troisième chapitre. Le cas de la membrane uniformément tendue, rectangulaire ou circulaire, puis celui du panneau plan, sont passés en revue. L'étude du panneau cylindrique, s'appuyant sur la théorie simplifiée de *Donnell-Coupry* [18] pour les vibrations de flexion à prédominance du mouvement radial, présente une analyse originale des caractéristiques dispersives, de la vitesse de propagation de l'énergie, et de la distribution angulaire de la densité modale. Le calcul de la densité modale donne des résultats analogues à ceux de *Bolotin* [13], c'est-à-dire avec une précision meilleure que ce qu'obtint *Heckl* [12], parti d'une théorie trop grossièrement approchée. Le calcul de la fonction de Green généralisée peut être effectué jusqu'au bout **dans la direction axiale** du panneau cylindrique, moyennant quelques hypothèses simplificatrices. Il met en évidence un comportement du type «parfaitement réverbérant», comme si la structure n'était pas directive. L'analyse présente une explication de ce paradoxe. La représentation spatio-temporelle du résultat, toujours en longitudinal, permet de mettre en évidence la vitesse apparente de propagation de l'énergie dans cette direction, ainsi que la décroissance des pics des corrélations croisées lorsque l'écart des points de mesure augmente. La notion de durée de vie ou durée de cohérence apparente du train d'ondes peut alors être introduite, et semble intéressante pour les applications.

• Le problème du transfert d'énergie entre une structure révervérante et un système mécanique linéaire, à un ou plusieurs degrés de liberté, lié à la structure en un ou plusieurs points discrets fait ensuite l'objet du chapitre IV. Ce problème a déjà été abordé, dans le cas simple d'un résonateur mécanique attaché en un point d'une structure, par *Smith* et *Lyon* [7]. Une méthode utilisant des impédances mécaniques d'entrée et de transfert permet, grâce au modèle mathématique global de la structure, de généraliser ces résultats à des systèmes à liaisons multiples, comportant n degrés de liberté.

• Enfin, nous présentons, dans le chapitre V, les principaux résultats d'une étude expérimentale entreprise sur un cylindre circulaire mince et homogène. Après un aperçu de ses caractéristiques modales, on expose successivement une confrontation entre les prévisions et les mesures de la densité modale, de la fonction de Green généralisée et de son expression spatio-temporelle. Cette confrontation permet de valider le modèle mathématique proposé et justifie, par conséquent, les hypothèses simplificatrices que l'on a dû y introduire. Pour terminer, après avoir élaboré un modèle mathématique de dissipation, dont le sens physique est clair, on montre que le calcul prévoit correctement la réponse de cette structure à une distribution de forces aléatoires dont on connait à la fois les spectres de puissance directs et croisés, ce qui constitue l'objectif principal de cette étude.

PRINCIPAUX SYMBOLES ET NOTATIONS

A ou A_o : aire de la surface moyenne Σ ou Σ_o

$A_i(f)$: admittance complexe du mode i

a : rayon moyen d'un cylindre circulaire mince

B : largeur de bande (en fréquence)

$C_p(M_1, M_2, \tau)$: fonction de correlation spatio-temporelle de pression = $E[p(M_1, t)\ p(M_2, t+\tau)]$

C : vitesse de phase

$D = \frac{E h^3}{12(1-\gamma^2)}$: module de rigidité d'une plaque plane en flexion

E ou $E[\ ]$: module d'Young ou espérance mathématique de $[\ ]$

$e(t)$: paramètre d'entrée d'un système

$F_i(t)$: force généralisée relative au mode i

f : fréquence

$G_{v_\infty}(f)$ ou $G_{v_{fini}}(M,f)$: admittance d'entrée d'une structure (infinie, ou finie en M)

$H_{v\infty}(M,f)$: fonction de transfert d'une structure infinie

$H(M_1, M_2, f)$: fonction de transfert complexe (entre les points M_1 et M_2)

h : épaisseur d'une plaque ou d'un cylindre

$h(M_1, M_2, t)$: réponse impulsionnelle à l'instant t

$K_{M,M',t}$: opérateur linéaire

$K(f)$: spectre de l'amplitude résonante crête

k ou $\bar{k}(\varphi, f)$: nombre d'ondes $\left(= \frac{2\pi}{\lambda}\right)$ fonction de la direction de propagation et de la fréquence

k_x, k_y : composantes du vecteur $\vec{k}$

L_{ox}, L_{oy} : dimensions caractéristiques de la surface moyenne d'une structure homogène

L_x, L_y : dimensions caractéristiques de la surface moyenne d'une structure quelconque

$\mathcal{L}_{M,t}$: opérateur différentiel du mouvement

M, M_i : point courant sur la structure

M_T, M_{oT} : masse totale de la structure Σ ou Σ_o

m, n : nombre de demi-ondes longitudinales, nombre d'ondes circonférentielles

$N_{M,M'}(M_1, M_2, \tau)$: noyau de Green spatio-temporel

$N(f)$: nombre de modes propres dont la fréquence est inférieure à f

$\bar{n}(f)$: densité modale

$\bar{n}'(\varphi, f)$: distribution angulaire de la densité modale

$p(M,t)$: pression au point M à l'instant t

$Q_{ij}(f)$: spectre croisé des forces généralisées relatives aux modes i et j

$R_{ee}(\tau)$: fonction d'autocorrélation de l'entrée $e(t)$

$S_p(M_1, M_2, f)$: densité spectrale croisée de la pression aux points M_1 et $M_2 = \mathcal{F}[C_p(M_1, M_2, \tau)]$

$V_g(f)$: vitesse de groupe

$v(M,t)$: vitesse au point M, à l'instant t

$\bar{v}^2$: valeur quadratique moyenne de $v(M,t)$

$w(M,t)$: déplacement du point M, à l'instant t.

Ox, Oy : axes de coordonnées rectangulaires
α_i : taux de viscosité du mode i

$\bar{\alpha} = EI/(EI)_0$: paramètre sans dimension
$\alpha_0 = D/\rho$: "
$\beta = h^2/12\,a^2$: "
$\beta_i = 2\mu_i \alpha_i \omega_i$: viscosité généralisée du mode i
$\tilde{\beta}(f)$: valeur moyenne de $\beta(f)$ dans une bande de fréquences
$\Gamma(\tau)$: fonction d'autocorrélation de la réponse d'un système

γ ou $\tilde{\gamma}(r, \tau)$: coefficient de corrélation spatio-temporelle
$\Gamma(M, M', \tau)$: corrélation spatio-temporelle de la réponse aux points M et M'
$\delta(M - M_i)$ ou $\delta(t)$: distribution de Dirac, au point M ou à l'instant origine
δ_{ij} : symbole de Kronecker
η ou $\eta_0(M; M', f)$: coefficient de cohérence ou de corrélation spatiale instantanée, à la fréquence f
λ : longueur d'onde
$\Phi(M, M', f)$: densité spectrale croisée de la réponse aux points M et M'
$\varphi_{MM'}(M_1, M_2, f)$: fonction de Green généralisée $= \mathcal{F}[N_{MM'}(M_1, M_2, \tau)]$
ρ ou $\bar{\rho}$: masse spécifique, ou masse par unité de surface
μ_i : masse généralisée du mode i
σ : écart-type
γ : coefficient de Poisson ou paramètre de fréquence sans dimension

NOTATIONS PARTICULIÈRES :

$\mathcal{F}[c(\tau)]$ ou $\mathcal{F}^{-1}[\delta(f)]$: transformée de Fourier directe ou inverse, en fréquence et en temps
$E[\,]$: espérance mathématique de $[\,]$

$$\ll UV \gg = \iint_{\Sigma_0 \times \Sigma_0} U(M_1, M_2, f)\, V(M_1, M_2, f)\, dM_1\, dM_2$$

ou

$$\ll u * v \gg = \iint_{\Sigma_0 \times \Sigma_0} u(M_1, M_2, t) \underset{t}{*} v(M_1, M_2, t)\, dM_1\, dM_2$$

$$\langle a.b \rangle = \frac{1}{A_0} \int_{\Sigma_0} a(M_1)\, b(M_1)\, dM_1$$

ou

$$\langle a \rangle = \frac{1}{A_0} \int_{\Sigma_0} a(M_1)\, dM_1$$

$\bar{q}(t)$: moyenne temporelle de $q(t)$
$\tilde{Q}(f)$: moyenne fréquencielle de $Q(f)$

*

Chapitre I

RÉPONSE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE A DES SOLLICITATIONS ALÉATOIRES

1. HYPOTHÈSES ET DÉFINITIONS

1,1. Description probabiliste de l'excitation

Nous nous proposons d'étudier les caractéristiques statistiques de la réponse d'un système soumis à des sollicitations aléatoires. Le but à atteindre consistera, par exemple, à savoir calculer les niveaux vibratoires recueillis sur une structure lorsque celle-ci est plongée dans un environnement turbulent, c'est-à-dire soumise à un champ de pressions fluctuantes $p(M,t)$ sur une partie Σ_0 de sa frontière.

Sauf indication contraire explicite, nous ferons l'hypothèse que les grandeurs d'entrée appartiennent à un processus aléatoire stationnaire du second ordre (19-20). Les caractéristiques probabilistes de l'excitation seront donc supposées complètement définies par la connaissance de $P_1(M_1, y_1, t_1)dy_1$, probabilité pour que la pression p exercée au point M_1 à l'instant t_1 soit comprise entre y_1 et y_1+dy_1 et par celle de $P_2(M_1, M_2, y_1, t_1, y_2, t_2)\, dy_1\, dy_2$, probabilité pour que $p(M_1, t_1)$ soit comprise entre y_1 et y_1+dy_1 et $p(M_2, t_2)$ comprise entre y_2 et y_2+dy_2. L'hypothèse de stationnarité consiste alors à supposer que P_1 et P_2 sont invariants par translation dans le temps, autrement dit que P_1 est indépendant de t_1 et que P_2 ne dépend que de $t_2-t_1=\tau$

Dans ces conditions, la fonction d'intercorrélation des excitations en M_1 et M_2 sera définie par la quantité :

$$C_p(M_1, M_2, \tau) = E[p(M_1, t)\, p(M_2, t+\tau)]$$

où $E[\ ]$ est l'espérance mathématique du produit entre crochets, c'est-à-dire :

I(1) $$C_p(M_1, M_2, \tau) = \iint_{-\infty}^{+\infty} y_1 \cdot y_2 \cdot P_2(M_1, M_2, y_1, t, y_2, t+\tau)\, dy_1\, dy_2$$

Le champ aléatoire sera également supposé ergodique, c'est-à-dire que la moyenne stochastique I(1) peut être remplacée par la moyenne temporelle :

I(2) $$C_p(M_1, M_2, \tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} p(M_1, t)\, p(M_2, t+\tau)\, dt$$

qui est supposée avoir un sens. En particulier, on a

$$C_p(M_1, M_1, 0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} p^2(M_1, t)\, dt$$

La puissance moyenne du signal est supposée finie.

1,2. Hypothèses relatives au comportement du système

a) Le comportement du système sera supposé **linéaire**, c'est-à-dire que sa réponse à une excitation $e(t)$ sera définie par la relation classique :

$$\text{I(4)} \qquad s(t) = h(t) * e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, e(t-u)\, du$$

ou, dans le cas d'un système mécanique continu

$$\text{I(4bis)} \qquad w(M,t) = \int_{\Sigma_0} h(M, M_1, t) \underset{t}{*} p(M_1, t)\, dM_1$$

dM_1 désignant l'élément d'aire associé au point M_1 et $h(M, M_1, t)$ représentant la réponse impulsionnelle au point M, c'est-à-dire la réponse en ce point à l'instant t due à une impulsion exercée en M_1 à l'instant origine. L'opération ($\underset{t}{*}$) indique le produit de convolution sur la variable temporelle. Physiquement, cette hypothèse revient à étudier les petits mouvements du système au voisinage d'un état de référence E_0 supposé indépendant du temps, ou à variation lente devant l'évolution vibratoire du système, de telle manière que l'on puisse le considérer comme fixe pendant la durée d'une expérience.

b) Nous supposerons enfin, dans tout ce qui va suivre, que **la réponse du système ne réagit pas sur l'entrée.** Par exemple, nous admettrons que les vibrations forcées engendrées sur une structure par le champ de pression $p(M,t)$ ne modifient que d'une quantité très petite -négligeable- le champ de pression extérieur. Il en résulte que nous dissocions complètement de cette étude les problèmes relatifs à l'instabilité dynamique du système, pour ne considérer que la question de sa réponse forcée à des excitations connues (au sens statistique).

1,3. Relations de Fourier - Densités spectrales de puissance

Nous rappelons ici les expressions des relations de Fourier entre les corrélations spatio-temporelles et les densités spectrales de puissance directes et croisées.

La densité spectrale croisée entre les points M_1 et M_2, à la fréquence f est définie par :

$$\text{I(5)} \qquad S_p(M_1, M_2, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_p(M_1, M_2, \tau) \exp -j2\pi f\tau \; d\tau$$

avec la relation inverse

$$\text{I(5bis)} \qquad C_p(M_1, M_2, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_p(M_1, M_2, f) \exp j2\pi f\tau \; df$$

Pour $M_1 \equiv M_2$, $S_p(M_1, M_1, f)$ définit le spectre direct au point M_1. En particulier, en utilisant I(3), I(5bis) donne :

$$\text{I(6)} \qquad C_p(M_1, M_1, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_p(M_1, M_1, f)\, df$$

La puissance totale du signal est donc répartie dans le domaine des fréquences, avec la densité $S_p(M_1, M_1, f)$ ce qui explique son appellation «densité spectrale de puissance» (en abrégé : «spectre de puissance» ou encore «spectre direct»).

D'autre part, on sait que la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert d'un système se correspondent également par transformation de Fourier, soit, si $H(M_1, M_1, f)$ désigne la fonction de transfert :

$$H(M, M_1, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(M, M_1, t) \exp - j2\pi ft \; dt$$

I(7) et

$$h(M, M_1, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(M, M_1, f) \exp j2\pi ft \; df$$

On notera souvent, pour abréger :

$$H(M, M_1, f) = \mathcal{F}\left[h(M, M_1, t)\right]$$

I(8)

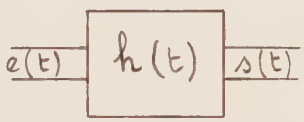
$$h(M, M_1, t) = \mathcal{F}^{-1}\left[H(M, M_1, f)\right]$$

2. RELATIONS ENTRÉE-SORTIE (SYSTÈMES DISCRETS)

Avant d'examiner le problème dans le cas général d'un système continu, il est utile de mettre en évidence quelques propriétés des relations entrée-sortie de systèmes discrets, susceptibles d'éclairer le sens physique des relations qui seront établies. Nous considèrerons pour cela le cas d'un quadripôle linéaire, à titre de rappel, puis celui d'un système à deux entrées, pouvant comporter un grand nombre de sorties.

2,1. Quadripôle linéaire (rappel)

a) spectre direct de la réponse



On a, d'après I(4) :

$$s(t) = h(t) * e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, e(t-u)\, du$$

où $e(t)$ est aléatoire stationnaire et ergodique.

Alors, la fonction d'autocorrélation de s s'exprime par

$$\Gamma_{ss}(\tau) = E\left[s(t)\, s(t+\tau)\right] = E\left[\iint_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, h(v)\, e(t+\tau-v)\, e(t-u)\, du\, dv\right]$$

soit comme $h(t)$ est une fonction certaine :

$$\Gamma_{ss}(\tau) = E\left[s(t)\, s(t+\tau)\right] = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, h(v)\, R_{ee}(\tau+u-v)\, du\, dv$$

où l'on a posé

$$R_{ee}(\alpha) = E\left[e(t)\, e(t+\alpha)\right]$$

En posant $v - u = v'$

$-u = u'$

il vient :

$$\Gamma_{ss}(\tau) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h(-u')\, h(v'-u')\, R_{ee}(\tau - v')\, du'\, dv'$$

ce qui peut s'écrire :

I(9) $$\boxed{\Gamma_{ss} = h^{\vee} * h * R_{ee}}$$

après avoir posé :

$$h^{\vee}(t) = h(-t)$$

Par transformation de Fourier des deux membres de I(9), et en utilisant les propriétés du produit de convolution dans cette transformation, il vient :

I(10) $$\Phi_{ss}(f) = |H(f)|^2\, S_{ee}(f)$$

avec $\Phi_{ss}(f) = \mathcal{F}[\Gamma_{ss}(\tau)]$

$S_{ee}(f) = \mathcal{F}[R_{ee}(\tau)]$

et en utilisant la propriété $\mathcal{F}[h^{\vee}(t)] = H^*(f)$, où H^* désigne la quantité imaginaire conjuguée de $H(f)$

Le spectre de puissance de la réponse est donc égal au produit du spectre de puissance de l'entrée et du carré du module de la fonction de transfert.

b) spectre croisé entrée-sortie

On démontre d'une manière analogue que :

I(11) $$\boxed{\Gamma_{es}(\tau) = E[e(t)\, s(t+\tau)] = h * R_{ee}}$$

Soit, après transformation de Fourier :

I(12) $$\boxed{\Phi_{es}(f) = H(f)\, S_{ee}(f)}$$

Le spectre croisé entrée-sortie est donc le produit du spectre de puissance de l'entrée par la fonction de transfert complexe $H(f)$. Si le spectre de puissance de l'excitation est connu, les relations I(10) et I(11) permettent donc de calculer les caractéristiques statistiques de la réponse si la fonction de transfert a été déterminée au préalable. Inversement, l'application de ces relations peut permettre de déterminer la fonction de transfert d'un système vibrant, en module et en phase, si l'on connait les spectres d'entrée et de réponse. Cette technique est maintenant couramment employée dans la pratique.

c) cohérence

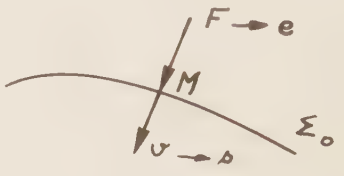
Le coefficient de cohérence est défini par le rapport

I(13) $$\eta(f) = \frac{\Phi_{es}(f)}{[\Phi_{ss}(f)\, S_{ee}(f)]^{1/2}}$$

Dans le cas présent, où la réponse du système est due à la seule excitation $e(t)$, le module du coefficient de cohérence vaut 1, comme on peut le voir immédiatement en portant I(10) et I(12) dans I(13). Il n'en serait pas ainsi si le système avait été attaqué par une source parasite $\mathcal{E}(t)$, non prise en compte dans $e(t)$. On démontre alors aisément que $|\eta|<1$. Le coefficient $|\eta|$ peut alors être considéré comme un indicateur permettant d'apprécier la validité de la mesure de la fonction de transfert au moyen des relations I(10) et I(12).

d) admittance d'entrée d'un système mécanique (application)

On peut utiliser directement la relation I(12) pour définir, d'une manière énergétique, l'admittance d'entrée d'un système mécanique. La force $F(t)$ appliquée au point M, joue alors le rôle de l'entrée $e(t)$, tandis que la vitesse v en ce point remplace le paramètre de sortie s. La fonction de transfert est alors $G_v(f)$ et on peut écrire I(12) sous la forme



$$\text{I(12bis)} \qquad \Phi_{FV}(f) = G_v(f)\, S_{FF}(f)$$

Remarquons alors que la fonction d'intercorrélation entre la force et la vitesse s'écrit :

$$\Gamma_{FV}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} F(t)\, v(t+\tau)\, dt$$

ce qui donne, en faisant $\tau = 0$, l'expression de la puissance moyenne **fournie** à la structure, soit

$$\Gamma_{FV}(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} F(t)\, v(t)\, dt$$

En écrivant que $\Gamma_{FV}(\tau)$ est l'image de Fourier de la densité spectrale croisée $\Phi_{FV}(f)$, puis en faisant $\tau = 0$, on a aussi :

$$\text{I(14)} \qquad \Gamma_{FV}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{FV}(f)\, df$$

ce qui indique que la puissance moyenne totale fournie à la structure possède la distribution spectrale définie par la densité $\Phi_{FV}(f)$.

On peut alors, en utilisant I(12bis), **définir l'admittance d'entrée** $G_v(f)$ du système comme la **densité spectrale de la puissance fournie au système** par une force aléatoire de spectre blanc égal à l'unité $(S_{FF}(f) = 1\,N^2/Hz)$. La puissance totale est alors donnée par :

$$\text{I(15)} \qquad \Gamma_{FV}(0) = 2\int_0^{\infty} R_e\left[G_v(f)\right] df \quad (\times 1\,N^2/Hz)$$

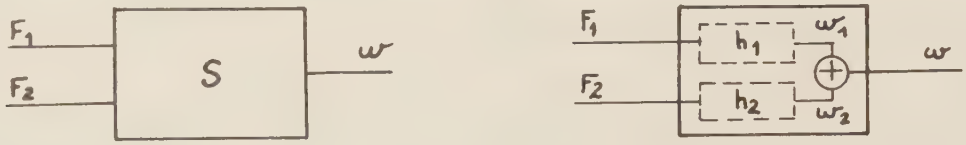
où l'on a utilisé I(14), en tenant compte du fait que la partie imaginaire de Φ_{FV} est impaire, et donne une contribution nulle à l'intégrale. Nous utiliserons cette définition dans la seconde partie de ce travail pour établir le lien entre l'admittance d'entrée et la densité modale d'une structure.

2,2. Système comportant deux entrées

a) relations entrées-sortie

Il est souvent possible de schématiser le fonctionnement d'un système physique en se ramenant à l'étude de sa réponse à deux excitations que nous noterons F_1 et F_2. Par exemple, F_1 et F_2 peuvent désigner les forces transmises au châssis par les trains avant et arrière d'une automobile ; ou encore F_1 et F_2 peuvent

représenter la variable lumineuse émise par des sources ponctuelles au cours d'une expérience d'interférences lumineuses. Nous nous proposons donc d'étudier ici des relations entrée-sortie valables pour une classe très large de systèmes, pouvant éventuellement comporter une infinité de sorties (vibrations provoquées en tous les points de l'automobile, ou éclairement recueilli en tout point de l'espace dans les deux exemples envisagés ci-dessus). Nous noterons ω le paramètre de réponse choisi en un point de sortie fixé.



Alors, si h_1 et h_2 désignent les réponses impulsionnelles au point choisi, relativement aux entrées 1 et 2, on aura, par suite de la linéarité du système

$$\omega = \omega_1 + \omega_2$$

avec

I(16)
$$\begin{cases} \omega_1 = h_1 * F_1 \\ \omega_2 = h_2 * F_2 \end{cases}$$

La fonction d'autocorrélation du paramètre de sortie s'écrit alors :

I(17)
$$\Gamma_{\omega\omega}(\tau) = \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}(\tau)$$

avec

$$\Gamma_{ij}(\tau) = E\left[\omega_i(t)\ \omega_j(t+\tau)\right]$$

soit, d'après I(16)

$$\Gamma_{ij}(\tau) = \iint_{-\infty}^{+\infty} h_i(u)\, h_j(v)\, E\left[F_i(t-u)\, F_j(t+\tau-v)\right] du\, dv$$

ce qui s'écrit, en appelant $C_{ij}(\tau)$ la fonction d'intercorrélation de F_i et F_j

I(18)
$$\Gamma_{ij} = h_i^{\vee} * h_j * C_{ij}$$

Par transformation de Fourier des deux membres de I(17), en tenant compte de I(18), il vient :

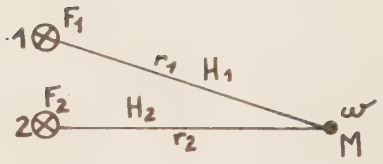
I(19)
$$\Phi_{\omega\omega}(f) = \underbrace{|H_1|^2 S_{11} + |H_2|^2 S_{22}} + \underbrace{2\, Re\left\{H_1^*\, H_2\, S_{12}\right\}}$$

où S_{11} et S_{22} désignent les spectres de puissance de F_1 et F_2 et S_{12} leur spectre croisé.

b) interprétation - Exemple : interférences lumineuses

L'expression I(19) se compose de deux termes directs et d'un terme complémentaire. Chaque terme direct donne la contribution de chacune des entrées du système comme si l'autre était absente. (cf. relation I(10)). Le terme complémentaire traduit l'interaction des réponses dues à F_1 et à F_2 : il est nul si F_1 et F_2 n'ont aucune corrélation entre elles, c'est-à-dire si elles sont statistiquement indépendantes. Ceci se traduit par $S_{12}(f) \equiv 0$. Dans le cas général, on a $S_{12}(f) \neq 0$ et il est nécessaire de prendre en compte ce terme complémentaire pour calculer le bilan global de la puissance recueillie : c'est en effet lui qui rend compte du phénomène d'interférences dans le cas du système optique envisagé au début de ce paragraphe.

Considérons en effet les deux sources 1 et 2 émettant une lumière monochromatique de fréquence f . On sait que ces sources ne sont susceptibles de créer des interférences que dans la mesure où elles sont **cohérentes**, ce qui implique que le processus physique aléatoire qui est à l'origine de l'émission de la variable lumineuse F_1 soit identique à celui qui provoque l'émission de F_2 . Dans notre langage, nous dirons alors que les sources sont parfaitement corrélées et nous poserons $S_{11} = S_{22} = S_{12}$



Soient r_1 et r_2 les distances entre les sources 1 et 2 et le point d'observation. La fonction de transfert à la fréquence f entre la source i et ce point s'écrit, si c est la vitesse de la lumière :

$$H_i(f) = \exp - j 2\pi f \frac{r_i}{c}$$

soit $|H_i(f)|^2 = 1$

Alors, l'intensité lumineuse en M est donnée par I(19) et s'écrit :

$$\Phi_{ww}(f) = 2 S_{11} \left[1 + \cos \left(2\pi f \frac{r_2 - r_1}{c} \right) \right]$$

expression classique qui rend bien compte de la répartition spatiale de l'intensité lumineuse.

c) principe de réciprocité

Nous allons montrer maintenant que le terme complémentaire ou terme d'interaction qui figure dans l'expression I(19) exprime une réalité physique simple. Pour la mettre en évidence, nous allons examiner ce qui se passe aux points d'entrée 1 et 2 lorsque l'on supprime F_1 et F_2 et que l'on exerce une sollicitation F à la sortie du système. Soient w'_1 et w'_2 les réponses aux points d'entrée

La symétrie des réponses impulsionnelles $h(M_i, M_j, t)$ par rapport à M_i et M_j (réciprocité des relations entrée-sortie) permet d'écrire :

$$w'_1 = h_1 * F$$
$$w'_2 = h_2 * F$$

Un calcul analogue à celui du paragraphe 2,2 a) conduit aisément à l'expression du spectre croisé entre w'_1 et w'_2. Il vient :

I(20) $$\Phi_{w'_1 w'_2}(f) = H_1^* H_2 S(f)$$

$S(f)$ désignant le spectre de puissance de F . Supposons alors que F ait un spectre blanc égal à l'unité $(S(f) = 1 N^2 | H_z)$ Alors, le spectre croisé de la réponse aux points 1 et 2 vaut $H_1^* H_2 (\times 1 N^2 | H_z)$ Le coefficient de cohérence des réponses s'écrit

I(21) $$\eta_{12} = \frac{\Phi^{(f)}_{w'_1 \, w'_2}}{\left[\Phi^{(f)}_{w'_1, w'_1} \cdot \Phi^{(f)}_{w'_2, w'_2} \right]^{1/2}}$$

soit, en utilisant I(20)

I(22) $$\eta_{12} = \frac{H_1^* H_2}{|H_1| |H_2|} = \exp j (\theta_2 - \theta_1)$$

après avoir posé $H_i = |H_i| \exp j\theta_i$

Le coefficient η_{12} renseigne donc directement sur les relations de phase à la fréquence f entre les vibrations issues d'une même source, mais reçues en des points différents. C'est la raison pour laquelle on le désigne parfois par «coefficient de correlation spatiale instantanée». à la fréquence f. Ce coefficient est indépendant de l'amplitude de ces vibrations et est caractéristique du système lui-même. En posant :

$$H_i^* H_j = \varphi_{ij} = |H_i||H_j| \eta_{ij}$$

on peut réécrire I(19) sous la forme :

I(19bis) $$\boxed{\Phi_{ww}(f) = \sum_{ij} \varphi_{ij} S_{ij}}$$

expression qui sera généralisée dans le cas continu au chapitre suivant.

Le point essentiel à noter ici, et **qui n'avait pas encore été signalé à notre connaissance** consiste dans la découverte du **caractère de réciprocité de la fonction** φ_{ij}, caractère sur lequel nous reviendrons ultérieurement dans le chapitre consacré à la fonction de Green généralisée d'un système.

3. CARACTÉRISTIQUES STATISTIQUES DE LA RÉPONSE D'UN SYSTÈME CONTINU

3,1. Expression intrinsèque

On considère maintenant une structure linéaire élastique excitée, sur une partie Σ_o de sa frontière, par un champ de pression $p(M_o, t)$. D'après I(4bis), la réponse en tout point M est donnée par :

I(4bis) $$w(M,t) = \int_{\Sigma_o} h(M, M_1, t) \underset{t}{*} p(M_1, t)\, dM_1$$

La fonction d'intercorrélation de la réponse aux points M et M' définie par

$$\Gamma(M, M', \tau) = E\left[w(M,t)\, w(M', t+\tau)\right]$$

s'écrit alors, après un calcul simple analogue au cas d'un système discret :

I(23) $$\boxed{\Gamma(M,M',\tau) = \iint_{\Sigma_o \times \Sigma_o} h(M, M_1, -t) \underset{t}{*} h(M', M_2, t) \underset{t}{*} C_p(M_1, M_2, t)\, dM_1\, dM_2}$$

où $C_p(M_1, M_2, t)$ désigne maintenant la fonction d'intercorrélation de la pression aux points M_1 et M_2

Le spectre croisé de réponse est alors obtenu par transformation de Fourier des deux membres, soit :

I(24) $$\boxed{\Phi(M,M',f) = \iint_{\Sigma_o \times \Sigma_o} \varphi_{MM'}(M_1, M_2, f)\, S_p(M_1, M_2, f)\, dM_1\, dM_2}$$

où l'on a posé

I(25) $$\varphi_{MM'}(M_1, M_2, f) = H^*(M, M_1, f)\, H(M', M_2, f)$$

Dans le but d'alléger l'écriture, on notera désormais :

I(24bis) $$\phi(M, M', f) = \ll \varphi_{MM} \quad S_p \gg$$

où << >> est définie par la partie droite de I(24).

En particulier, le spectre de puissance au point M s'écrit :

I(26) $$\boxed{\phi(M, M, f) = \ll \varphi_{MM} \quad S_p \gg = \iint_{\Sigma_o \times \Sigma_o} \varphi_{MM}(M_1, M_2, f)\, S_p(M_1, M_2, f)\, dM_1\, dM_2}$$

qui généralise I(19bis) au cas d'un système continu.

Cette expression intrinsèque montre que le calcul du spectre de puissance en tout point fait intervenir une fonction φ_{MM}, caractéristique de la structure, et la fonction $S_p(M_1, M_2, f)$ représentant la densité spectrale croisée de la pression. On remarque dans I(26) que φ_{MM} joue le rôle d'une fonction de Green pour le problème posé. Nous montrerons, dans le paragraphe 4, que cette fonction jouit bien des propriétés d'une fonction de Green, **généralisée, en ce sens qu'elle intervient dans les relations entre les caractéristiques statistiques d'entrée et de sortie de la structure.** Ce concept a été introduit pour la première fois par *Bourgine* [14].

Il est souvent commode de représenter les mouvements d'une structure dans la base de ses modes propres de vibration [21]. Lorsque les modes sont accessibles, soit par le calcul, soit par l'expérience, la représentation des caractéristiques statistiques des réponses dans cette base présente en effet des avantages certains. Nous montrerons qu'il n'en est pas toujours ainsi, et que l'on peut avoir, au contraire, de puissantes raisons d'éviter cette approche. Nous développons ci-dessous le calcul conduisant aux résultats classiques de *Powell* [1] pour l'expression du spectre de puissance de la réponse.

3,2. Expression dans la base modale

3,2.1. Calcul du spectre de puissance

La fonction de transfert entre deux points M et M_1 d'une structure dissipative, satisfaisant à l'hypothèse de Basile, peut s'écrire dans la base modale sous la forme classique :

I(27) $$H(M, M_1, f) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(f)\, \psi_i(M)\, \psi_i(M_1)$$

expression dans laquelle les $\psi_i(M)$ désignent des formes propres de la structure, les $A_i(f)$ étant les admittances complexes des modes propres, c'est-à-dire, pour le paramètre vitesse :

I(28) $$A_i(f) = \frac{j\omega}{\mu_i(\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\alpha_i\omega_i\omega)} \qquad (\omega = 2\pi f)$$

ω_i est la pulsation propre du mode i, μ_i sa masse généralisée et α_i son taux de viscosité. Les ψ_i forment une base complète orthogonale pour les déformations du système, avec la métrique définie par

I(29) $$\int_{\Sigma} \rho(M)\, \psi_i(M)\, \psi_j(M)\, dM = \mu_i \delta_{ij}$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker.

Alors, en explicitant la fonction $\varphi_{MM}(M_1, M_2, f)$, définie par I(25), à l'aide de I(27), le spectre de puissance de la réponse au point M s'écrit :

$$\phi(M, M, f) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \psi_i(M)\, \psi_j(M)\, A_i^*(f)\, A_j(f) \iint_{\Sigma_o \times \Sigma_o} S_p(M_1, M_2, f)\, \psi_i(M_1)\, \psi_j(M_2)\, dM_1\, dM_2$$

ou encore :

$$\text{I(30)} \qquad \phi(M,M,f) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \psi_i(M)\,\psi_j(M)\,A_i^*(f)\,A_j(f)\,Q_{ij}(f)$$

après avoir posé :

$$\text{I(31)} \qquad Q_{ij}(f) = \iint_{\Sigma_o \times \Sigma_o} S_p(M_1,M_2,f)\,\psi_i(M_1)\,\psi_j(M_2)\,dM_1\,dM_2$$

Cette dernière quantité n'est autre que le spectre croisé des forces généralisées $F_i(t)$ et $F_j(t)$. En effet, on a :

$$F_i(t) = \int_{\Sigma_o} p(M_1,t)\,\psi_i(M_1)\,dM_1$$

donc :

$$E\left[F_i(t)\,F_j(t+\tau)\right] = \iint_{\Sigma_o \times \Sigma_o} E\left[p(M_1,t)\,p(M_2,t+\tau)\right]\psi_i(M_1)\,\psi_j(M_2)\,dM_1\,dM_2$$

qui fait apparaître au second membre la fonction d'intercorrélation de la pression $C_p(M_1,M_2,t)$. La transformée de Fourier des deux membres donne bien I(31).

On peut alors réécrire I(30) sous la forme :

$$\text{I(30bis)} \qquad \phi(M,M,f) = \sum_{i=1}^{\infty} |A_i(f)|^2\,\psi_i^2(M)\,Q_{ii}(f) + \sum_{i \neq j} A_i^*\,A_j\,\psi_i(M)\,\psi_j(M)\,Q_{ij}(f)$$

La première somme ne fait intervenir que des termes directs dont chacun exprime la contribution du mode i, considéré isolément, à la puissance totale recueillie en M : la structure de chaque terme direct est analogue à ce que nous avions obtenu dans l'étude des relations entrée-sortie du quadripôle linéaire (cf. expression I(10)), le spectre de puissance de la force excitatrice étant maintenant remplacé par le spectre de puissance de la force généralisée $Q_{ii}(f)$, la fonction de transfert devenant ici la «fonction de transfert modale» $A_i(f)\psi_i(M)$.

La seconde série exprime l'interaction des réponses suivant les différents modes de vibrations du système. Si ces modes propres ont des fréquences propres assez éloignées les unes des autres, à une fréquence donnée les termes en $A_i^* A_j$ sont petits et la seconde série donne une contribution faible à la puissance totale reçue en M : elle pourra être négligée en première approximation. Si au contraire les fréquences propres sont voisines les unes des autres, on doit tenir compte de la série des termes croisés, ce qui alourdit considérablement le calcul.

3,2.2. Energie cinétique totale du système

L'énergie cinétique totale du système, à la fréquence f, ou plus précisément la densité spectrale de l'énergie cinétique totale, a pour expression

$$\text{I(32)} \qquad \mathcal{C}(f) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma} \rho(M)\,\phi(M,M,f)\,dM$$

ce qui donne, en utilisant I(30bis), compte tenu de I(29) :

$$\text{I(33)} \qquad \mathcal{C}(f) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i\,|A_i(f)|^2\,Q_{ii}(f)$$

En remarquant alors que $|A_i(f)|^2 = \dfrac{1}{\beta_i}\,Re\left\{A_i(f)\right\}$

$$\text{I(34)} \qquad \text{avec } \beta_i = 2\alpha_i\,\omega_i\,\mu_i$$

on peut écrire $\mathcal{C}(f)$ sous la forme équivalente :

I(33bis) $$\mathcal{C}(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \, Re\left[A_i(f)\right] \frac{Q_{ii}}{\beta_i}$$

3,2.3. Niveaux quadratiques moyens

La valeur quadratique moyenne de la réponse en un point M s'obtient classiquement par l'intégration du spectre de puissance par rapport à la fréquence. On a

I(35) $$\sigma_w^2(M) = \Gamma(M,M,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(M,M,f)\, df$$

ce qui peut encore s'écrire, puisque ϕ est une fonction paire de la fréquence :

$$\sigma_w^2 = 2\int_{0}^{\infty} \phi(M,M,f)\, df$$

Alors, si l'on peut admettre que, sur un certain intervalle spectral, les spectres croisés $Q_{ij}(f)$ dépendent peu de la fréquence ou plus précisément si leur variation est lente devant celle des produits $A_i^* A_j$ (qui présentent au contraire des variations rapides si les amortissements sont assez petits), on pourra écrire

I(36) $$\begin{cases} \sigma_w^2(M) \simeq \sum_k \sigma_k^2 \quad , \text{ avec} \\ \sigma_k^2 = \sum_{i,j \in \mathcal{E}_k} \psi_i(M)\, \psi_j(M) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} A_i^*(f)\, A_j(f)\, df\right] Q_{ij}(f_k) \end{cases}$$

où $\mathcal{E}_k$ désigne l'ensemble des indices i et j des modes de fréquence comprise dans le domaine k, et où $Q_{ij}(f_k)$ représente la valeur moyenne de Q_{ij} dans la bande de fréquences considérée. On trouve, pour le paramètre déplacement :

I(37) $$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} A_i^*(f)\, A_j(f)\, df = \dfrac{2}{\mu_i \mu_j} \dfrac{\alpha_i \omega_i + \alpha_j \omega_j}{(\omega_i^2 - \omega_j^2)^2 + 4\omega_i\omega_j(\alpha_i\omega_i + \alpha_j\omega_j)(\alpha_i\omega_j + \alpha_j\omega_i)} \\ \text{et} \int_{-\infty}^{+\infty} |A_i(f)|^2\, df = \dfrac{1}{\mu_i^2} \dfrac{1}{4\alpha_i\omega_i^3} \end{cases}$$

De façon générale (quel que soit le paramètre de réponse choisi), on a

I(38) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |A_i(f)|^2 df = \frac{1}{2} \Delta\omega_i \, |A_{i_{res}}|^2$$

avec $\Delta\omega_i = 2\alpha_i\omega_i$ et $A_{i_{res}} = A_i(f_i)$

L'énergie cinétique totale s'obtient alors aisément en intégrant I(33) sous les mêmes hypothèses, et il vient :

$$\mathcal{C}_c = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}(f)\, df$$

soit

I(39) $$\mathcal{C}_c \simeq \sum_k \left(\sum_{i \in \mathcal{E}_k} \frac{Q_{ii}(f_k)}{4\beta_i} \right)$$

On montrerait aisément que l'énergie cinétique moyenne d'un système à un degré de liberté (masse-ressort-dash-pot), attaqué par une force aléatoire de spectre blanc S_{FF} a pour valeur :

$$\frac{1}{2} m \overline{v}^2 = \frac{S_{FF}}{4\beta}$$

I(39) signifie donc que l'énergie cinétique totale du système continu représente la somme des énergies de chacun des résonateurs élémentaires qu'il contient.

3,2.4. Moyennes fréquencielles - Etude globale

Ce qui précède montre que, si l'on connait le schéma modal de la structure et les caractéristiques statistiques de l'excitation, on peut résoudre complètement le problème de la détermination des caractéristiques statistiques de sa réponse. On remarque toutefois que le calcul peut devenir assez lourd si un grand nombre de modes doivent être mis en jeu et on est alors tenté, s'il est possible de se satisfaire d'une telle approximation, de chercher une évaluation moyenne (en fréquence) des spectres de sortie. En d'autres termes, par un filtrage peu sélectif des paramètres de réponse autour d'une fréquence f_k , avec une fenêtre de filtrage de largeur B, on limitera l'analyse à la recherche d'un spectre moyen $\tilde{\Phi}(M,M,f_k)$ défini par

I(40) $$\tilde{\Phi}(M,M,f_k) = \frac{1}{B} \int_{f_k - \frac{\beta}{2}}^{f_k + \frac{\beta}{2}} \Phi(M,M,\gamma)\, d\gamma$$

La puissance du signal issu de ce filtre est alors :

I(41) $$\sigma_k^2 \simeq B.\ \tilde{\Phi}(M,M,f_k)$$

c'est d'ailleurs ce que nous avons fait mathématiquement au paragraphe précédent en sommant les contributions des modes situés dans une bande de fréquence où le spectre des forces extérieures était supposé constant. Dans cette hypothèse, l'expression I(26) peut s'écrire :

I(42) $$\tilde{\Phi}(M,M,f) \simeq \ll \tilde{\varphi}_{MM}\, S_p \gg$$

et le calcul de $\tilde{\Phi}(M,M,f)$ peut être mené jusqu'au bout à l'aide de la représentation dans la base modale en utilisant I(41) et la seconde expression I(36), compte tenu de I(37).

On aboutit alors à une définition moins fine du spectre de sortie, mais souvent suffisante pour les applications. Toutefois, cette approche du problème nécessite encore la connaissance du schéma modal, et il est peu satisfaisant de devoir intégrer dans le domaine spectral des quantités dont l'obtention est souvent assez difficile, même si on limite l'analyse aux fréquences assez basses.

Dans la pratique, cette limitation n'est que rarement admissible. En effet, les excitations naturelles des structures, qu'elles soient de nature acoustique (bruits industriels, bruits de jets, etc...) ou d'origine aérodynamique (turbulences d'écoulements fluides, instabilités d'écoulements...) couvrent une gamme de fréquence étendue atteignant couramment 2000 Hz ou davantage.

Il s'ensuit que la détermination des caractéristiques vibratoires de la structure, par voie théorique ou par voie expérimentale, doit couvrir un spectre large. On se heurte ici à plusieurs sortes de difficultés :

a) Toute étude théorique de la dynamique vibratoire d'une structure réelle repose sur une idéalisation de cette structure et de ses conditions aux limites. Malgré les progrès remarquables accomplis dans ce domaine depuis quelques années, notamment grâce à l'application de méthodes de calcul par éléments finis, la qualité des résultats ne vaut en dernière analyse que ce que vaut l'idéalisation de l'objet d'étude. L'expérience montre quand elle est réalisable, que le modèle mathématique ne représente correctement le cas réel que pour les modes de rang peu élevé. La précision s'altère de plus en plus quand le rang augmente.

b) Il est courant de rencontrer 300 modes propres, voire davantage, dans une gamme de fréquences de l'ordre de 2000 Hz. D'une façon générale, les fréquences propres de ces modes sont de plus en plus voisines quand la fréquence s'élève, et le spectre de réponse à une excitation à bande large tend à présenter une structure de type continue si les amortissements ne sont pas trop faibles.

c) L'étude expérimentale du problème de l'identification des modes reste également limitée au domaine inférieur du spectre (quelques centaines de hertz au maximum) pour des raisons techniques et également compte tenu de sa durée excessive quand le nombre des modes devient élevé.

Il découle de ces observations que la représentation des mouvements de la structure dans la base modale ne permet pas en général d'atteindre l'objectif que nous nous sommes assigné. Le concept de «fonction de Green généralisée», que nous allons étudier maintenant, va nous permettre de dégager une voie nouvelle pour tenter de résoudre le problème.

4. FONCTION DE GREEN GÉNÉRALISÉE

Nous avons montré au paragraphe 3 que la fonction de corrélation spatio-temporelle $\Gamma(M,M',\tau)$ de la réponse d'un système continu à une distribution de pressions aléatoires pouvait être calculée si l'on connaît la carte $C_p(M,M',\tau)$ des corrélations spatio-temporelles de la pression, d'une part, et une certaine fonction, caractéristique de la structure, d'autre part (cf. I(23) et I(24)). Cette dernière fonction s'exprimait, dans le domaine temporel, par un produit de convolution des réponses impulsionnelles, soit :

I(43) $$N_{M_1M_2}(M,M',t) = h(M,M_1,t) \underset{t}{*} h(M',M_2,t)$$

ou, de manière équivalente, par sa transformée de Fourier :

I(44) $$\varphi_{M_1M_2}(M,M',f) = H^*(M,M_1,f)\, H(M',M_2,f)$$

les couples de points (M_1,M_2) et (M,M') pouvant être échangés en raison des propriétés de symétrie des fonctions h et H .

Nous nous proposons de montrer que $\varphi_{M_1M_2}(M,M',f)$ est la fonction de Green du problème, c'est-à-dire que, si $\hat{K}_{M,M',f}$ désigne un certain opérateur d'espace dépendant des coordonnées des points M et M' tel que :

I(45) $$\hat{K}_{M,M',f}\ \varphi_{M_1M_2}(M,M',f) = \delta(M-M_1)\,\delta(M'-M_2)$$

le spectre croisé $\Phi(M,M',f)$ de la réponse à une excitation aléatoire définie par le spectre croisé $S_p(M,M',f)$ vérifie l'équation

I(46) $$\hat{K}_{M,M',f}\ \Phi(M,M',f) = S_p(M,M',f)$$

La nature et les propriétés de cet opérateur $\hat{K}$ doivent maintenant être précisées.

4,1. Equations locales des caractéristiques statistiques de la réponse

4,1.1. Définition d'une équation fonctionnelle

Soit $\mathcal{L}_{M,t}$ l'opérateur différentiel linéaire du mouvement du système. Nous supposerons pour simplifier que le déplacement en tout point a lieu suivant une direction prépondérante. Soit $w(M,t)$ ce déplacement. $\mathcal{L}_{M,t}$ est alors un opérateur linéaire scalaire, à coefficients éventuellement variables si le milieu est inhomogène, incluant des termes de dissipation d'énergie si le système n'est pas conservatif. On a

I(47) $$\mathcal{L}_{M,t}\, w(M,t) = p(M,t)$$

En particulier, la réponse impulsionnelle $h(M,M_1,t)$ est solution de l'équation :

I(48) $$\mathcal{L}_{M,t}\, h(M,M_1,t) = \delta(M-M_1)\,\delta(t)$$

δ étant la distribution de Dirac.

On définit un opérateur linéaire $K_{M,M',t}$ tel que, si $N_{M_1,M_2}(M,M',t)$ est donné par I(43) :

I(49) $$K_{M,M',t}\, N_{M_1,M_2}(M,M',t) = \mathcal{L}_{M,-t}\, h(M,M_1,-t) \underset{t}{*} \mathcal{L}_{M',t}\, h(M',M_2,t)$$

On vérifie alors immédiatement, en raison de I(48), que

I(50) $$K_{M,M',t}\, N_{M_1,M_2}(M,M',t) = \delta(M-M_1)\,\delta(M'-M_2)\,\delta(t)$$

et, d'autre part, en appliquant l'opérateur K à I(23), compte tenu de I(43) et I(50) :

I(51) $$K_{M,M',t}\, \Gamma(M,M',t) = C_p(M,M',t)$$

On en déduit une interprétation de I(23) sous la forme du **lemme :**

La fonction d'incorrélation $\Gamma(M,M',t)$ *de la réponse à une excitation aléatoire définie par la fonction d'intercorrélation* $C_p(M,M',t)$ *) de la pression est solution de l'équation fonctionnelle I(51) et s'écrit :*

I(52) $$\Gamma(M,M',t) = \iint_{\Sigma_o \times \Sigma_o} N_{M_1,M_2}(M,M',t) \underset{t}{*} C_p(M_1,M_2,t)\, dM_1\, dM_2$$

$N_{M_1,M_2}(M,M',t)$ étant le noyau de Green de l'opérateur K, comme le montre l'expression I(50).

4,1.2. Conséquence : généralisation de fonction de Green

Par transformation de Fourier des relations I(50) et I(51), on définit l'opérateur $\hat{K}_{M,M',f}$ tel que :

I(45) $$\hat{K}_{M,M',f}\, \varphi_{M_1,M_2}(M,M',f) = \delta(M-M_1)\,\delta(M'-M_2)$$

où φ est l'image de Fourier de N. D'autre part :

I(46) $$\hat{K}_{M,M',f}\, \Phi(M,M',f) = S_p(M,M',f)$$

et on a bien, en définitive :

I(24) $$\Phi(M,M',f) = \iint_{\Sigma_o \times \Sigma_o} \varphi_{MM'}(M_1,M_2,f)\, S_p(M_1,M_2,f)\, dM_1\, dM_2$$

La fonction $\varphi_{MM'}(M_1, M_2, f)$ peut donc être interprétée comme **la fonction de Green de l'opérateur** $\hat{K}_{M,M',f}$. Comme les équations I(46) ou I(51) relient les caractéristiques statistiques d'entrée et de sortie de notre système, la fonction $\varphi_{MM'}(M_1, M_2, f)$ représente une généralisation de la notion de fonction de Green. Nous conviendrons toutefois de réserver l'appellation «fonction de Green généralisée» à une classe particulière de fonctions φ dont l'intérêt va maintenant être mis en évidence.

4,2. Concept de fonction de Green généralisée

4,2.1. Interprétation physique

Nous allons maintenant nous intéresser plus particulièrement au cas particulier important où $M \equiv M'$, c'est-à-dire au calcul de la fonction **d'autocorrélation** $\Gamma(M, M, \tau)$ ou de la densité spectrale de puissance $\phi(M, M, f)$ de la réponse à une excitation aléatoire définie par $C_p(M_1, M_2, t)$ ou $S_p(M_1, M_2, f)$. Alors, comme nous l'avons déjà montré :

I(26) $$\phi(M, M, f) = \ll \varphi_{MM} \cdot S_p \gg$$

et d'après ce que nous venons de voir, φ_{MM} vérifie l'équation :

I(53) $$\boxed{\hat{K}_{M_1, M_2, f}\ \varphi_{MM}(M_1, M_2, f) = \delta(M - M_1)\,\delta(M - M_2)}$$

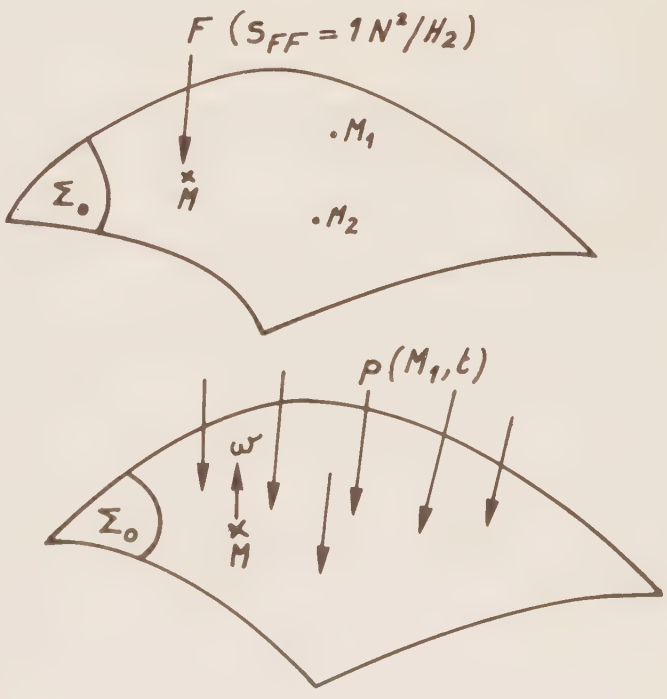
Ce dernier résultat possède une signification physique simple, d'une importance capitale.

En effet, le second membre de I(53) représente une distribution de spectre croisé de pression indépendante de la fréquence. La structure de ce second membre, où interviennent des distributions de Dirac montre que ce spectre croisé est nul pour tous les couples de points (M_1, M_2) distincts du point M. **Physiquement,** cela signifie que la structure est excitée par une **force ponctuelle concentrée au point M,** et dont le spectre est blanc, d'amplitude égale à l'unité ($1N^2/Hz$).

Alors, le premier membre de I(53) indique que $\varphi_{MM}(M_1, M_2, f)$ est le **spectre croisé de la réponse** aux points courants M_1 et M_2.

En résumé :

a) Si on applique en un point $M \in \Sigma_o$ une force aléatoire de spectre blanc unité, le spectre croisé de la réponse aux points M_1 et M_2 courants est $\varphi_{MM}(M_1, M_2, f)$



b) Si une distribution de pression $p(M_1, t)$ est répartie sur Σ_o, avec le spectre croisé $S_p(M_1, M_2, f)$, la réponse $\omega(M, t)$ **au point M** possède une densité spectrale :

$$\phi(M, M, f) = \ll \varphi_{MM} \cdot S_p \gg$$

Ceci généralise les résultats présentés au paragraphe 2.2.c) dans le cas de systèmes discrets. **Le principe de réciprocité** établi dans ce cas a donc une validité très générale.

Nous désignerons à partir de maintenant, et en raison des propriétés que nous venons de mettre en évidence, la fonction $\varphi_{MM}(M_1, M_2, f)$ sous le nom de « **fonction de Green généralisée** » du problème.

4,2.2. Etude expérimentale directe

Grâce à la remarque a) ci-dessus, il est possible d'accéder directement à la fonction $\varphi_{MM}(M_1, M_2, f)$ par voie expérimentale, **même dans le cas de structures très complexes présentant des assemblages ou des inhomogénéités marquées** (renforts ou évidements par exemple). Il suffit en effet pour cela de mesurer les spectres croisés de réponse sur la structure en un certain nombre de couples de points d'un maillage, en excitant à l'aide de forces appliquées successivement en des points M où l'on désire connaître les caractéristiques statistiques de réponse sous charge aléatoire répartie sur Σ_o.

Remarquons encore que la définition se prête aisément à la détermination de la moyenne fréquencielle de φ_{MM}, telle que nous l'avons introduite au paragraphe 3,2.4 (cf. formule I(42)). En effet, si la force appliquée au point M possède un spectre étroit, centré autour de la fréquence f, de largeur B, on aura :

$$\text{I(54)} \qquad \tilde{\varphi}_{MM}(M_1, M_2, f) = \frac{1}{B} E\left[\omega_f(M_1, t) \cdot \omega_f(M_2, t)\right]$$

où $\omega_f(M,t)$ représente la réponse en M à l'instant t, due à cette force aléatoire. On peut encore écrire, en raison de l'ergodicité :

$$\text{I(55)} \qquad \tilde{\varphi}_{MM}(M_1, M_2, f) = \frac{1}{B} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \omega_f(M_1, t) \cdot \omega_f(M_2, t)\, dt$$

qui montre que $\tilde{\varphi}_{MM}(M_1, M_2, f)$ possède la signification d'une fonction d'intercorrélation **instantanée** (c'est-à-dire prise sur des valeurs simultanées de la réponse en M_1 et M_2) et **prise en moyenne sur un intervalle spectral de largeur B autour de la fréquence f.**

4,2.3. Excitations non corrélées

Supposons, à titre d'exemple, que la distribution de pression agissant sur la structure soit telle que

$$\text{I(56)} \qquad S_p(M_1, M_2, f) = A\, S_{p_1}(f)\, \delta(M_1 - M_2)$$

Autrement dit, sur chaque aire élémentaire dM_1, on exerce une force élémentaire $dF(M_1, t)$ statistiquement indépendante des autres forces appliquées. Il vient alors, en utilisant I(26) :

$$\text{I(57)} \qquad \phi_1(M, M, f) = A\, S_{p_1}(f) \int_{\Sigma_o} \varphi_{MM}(M_1, M_1, f)\, dM_1$$

Alors, comme $\varphi_{MM}(M_1, M_1, f)$ désigne le spectre de puissance de la réponse en M_1, dû à une force placée en M, de spectre unité, le second membre peut s'écrire sous la forme

$$\left[\frac{1}{A} \int_{\Sigma_o} A^2 S_{p_1}(f)\ \varphi_{MM}(M_1, M_1, f)\, dM_1\right]$$

où A est l'aire de Σ_o. Le crochet représente maintenant **la moyenne spatiale** du spectre de puissance de la réponse à une force placée en M, et de spectre $A^2 S_{p_1}(f)$

On peut écrire par conséquent que le spectre de puissance en un point M sous l'effet d'une distribution de pression **homogène dans l'espace, non corrélée**, est égal au **spectre de puissance moyen sur toute la structure** dû à une **force unique,** concentrée au point M , et de spectre égal à $A^2\, S_{p_1}(f)$: on démontre immédiatement que cette quantité représente le spectre de la charge totale due à la pression sur la structure. En effet, si

$$F(t) = \int_{\Sigma_o} p\,(M_1, t)\, dM_1$$

désigne la charge totale, on a, pour la fonction d'autocorrélation de $F(t)$:

$$R_{FF}(t) = \iint_{\Sigma_o \times \Sigma_o} C_p\,(M_1, M_2, \tau)\, dM_1\, dM_2$$

soit par transformation de Fourier :

$$S_{FF}(f) = \iint_{\Sigma_o \times \Sigma_o} S_p\,(M_1, M_2, f)\, dM_1\, dM_2$$

et, en raison de I(56), il vient :

$$S_{FF}(f) = A^2\, S_{p_1}(f)$$

Tout se passe donc comme si toute la charge était concentrée en M et on peut écrire I(57) sous la forme :

$$A\, \phi_1(M, M, f) = \int_{\Sigma_o} S_{FF}(f)\, \varphi_{MM}(M_1, M_1, f)\, dM_1$$

et, si la structure est homogène et bidimensionnelle en multipliant les deux membres par la masse surfacique $\bar{\rho}$ de Σ_o et en posant $M_T = \bar{\rho} A$, on trouve :

I(58)
$$M_T\, \phi_1(M, M, f) = \int_{\Sigma_o} S_{FF}(f)\, \bar{\rho}\, \varphi_{MM}(M_1, M_1, f)\, dM_1$$

En termes énergétiques, ceci signifie que, si on attribue au point M la masse totale M_T de la structure, son énergie cinétique sous charge répartie sur Σ_o est égale à l'énergie cinétique totale de la structure quand on applique au même point une force égale à la charge totale supportée par Σ_o

4,3. Recherche d'un modèle mathématique

Nous avons montré que la fonction de Green généralisée était susceptible d'une interprétation physique très simple, qui fournissait également le principe de sa détermination expérimentale. Cependant, l'application pratique d'une telle méthode dans l'étude des structures serait délicate et fastidieuse si l'on ne s'efforçait de guider la recherche expérimentale en lui fournissant un cadre théorique, assez général pour inclure une grande variété de situations concrètes, assez précis pour être cependant efficace. C'est ce que nous appellerons la recherche d'un **modèle mathématique,** idéalisant dans des limites que nous préciserons, l'allure générale de la fonction de Green généralisée relative à chaque problème particulier.

4,3.1. Caractère statistique de l'étude structurale

Nous allons montrer qu'il est légitime d'envisager la question de l'étude du comportement dynamique d'une structure d'un point de vue statistique. Pour cela, considérons d'abord l'expérience suivante :

Soit à étudier les caractéristiques statiques de la réponse d'un élément de structure d'un missile soumise à des excitations pariétales acoustiques provoquées par le jet (supposées stationnaires et ergodiques) au moment du lancement. On dispose d'une population de missiles de construction identique, dont les conditions générales

de fonctionnement, au départ, sont également identiques. La configuration macroscopique de l'expérience est définie par un certain nombre de paramètres accessibles (cotes de fabrication, paramètres de fonctionnement). L'aléa est alors caractérisé par les instabilités de combustion, l'interaction jet-atmosphère et jet-obstacles (effet de sol) d'une part, et par la dispersion de fabrication de la structure d'autre part.

Alors, si on considère N épreuves consistant à tirer successivement N propulseurs dans la même configuration macroscopique, en mesurant à chaque fois la réponse en un point particulier de la structure, on disposera de N enregistrements en fonction du temps depuis l'instant origine de mise à feu.

A l'instant t, l'ensemble de ces enregistrements fournit N déterminations $w_i(t)$ de la réponse, c'est-à-dire donne le résultat de N épreuves sur la variable aléatoire $W(t)$ (t fixé).

Alors, comme nous nous proposons d'établir des relations entre les caractéristiques statistiques de W et celles de la pression agissant sur la structure, il devient naturel de considérer en premier lieu l'étude structurale comme relevant également de la statistique. En particulier, au lieu de chercher à obtenir les fréquences propres ou amortissements des modes de rang élevés (variables d'un missile à un autre) dans le cadre d'une idéalisation convenable du problème réel, on pourra par exemple définir le nombre de modes dont les fréquences sont comprises entre f et $f+df$ et, parmi ceux-ci, quelle est la probabilité de trouver un mode dont la déformée présente telle particularité. Nous exposerons en détail ce point de vue dans la seconde partie de ce travail. Bornons-nous pour le moment à reconnaître la légitimité de considérer l'étude structurale du point de vue statistique, ce qui implique en particulier l'idée de grouper les modes «par paquets» pour obtenir de nouvelles caractéristiques dynamiques moyennes (en fréquence). Le schéma modal apparaît alors comme un niveau d'analyse plus profond que celui que proposons et que nous appelons, pour cette raison, niveau global.

4,3.2. Estimation des caractéristiques statistiques

La description probabiliste des propriétés d'une fonction aléatoire à travers la réalisation de N épreuves sur le processus, telles que nous venons de l'envisager au paragraphe précédent, est en général impossible pour des raisons évidentes et on fait appel à l'hypothèse d'ergodicité (cf. paragraphe 1,1.) pour substituer aux moyennes stochastiques, portant sur N épreuves, des moyennes temporelles sur une seule épreuve de **durée infinie**. La validité de cette hypothèse n'étant pas mise en cause ici, il est clair que toute mesure physique portera sur une durée finie, et que la grandeur cherchée est hors d'atteinte. Tout ce que l'on peut obtenir, c'est une **estimation** de cette grandeur par une moyenne temporelle sur un intervalle de temps T. Par exemple, on mesurera la quantité :

$$g_{xy}(t,T,\tau) = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T} x(u)\, y(u+\tau)\, du$$

$g_{xy}(t,T,\tau)$ est alors une estimation de la fonction d'intercorrélation de x et y. On peut considérer g_{xy} comme le résultat à l'instant t de l'épreuve «prendre la moyenne du produit $x(u)y(u+\tau)$ pendant la durée T» sur une réalisation particulière $\{x(t), y(t)\}$ des N expériences précédentes. On peut alors considérer $g_{xy}(t,T,\tau)$ comme une variable aléatoire. On montre immédiatement que sa moyenne $E[g_{xy}(t,T,\tau)]$ est égale à $E[x(t)\,y(t+\tau)]$ c'est-à-dire à la quantité cherchée. Alors, T étant fixé par les conditions de l'expérience, on peut définir la qualité ε de l'estimation en calculant le rapport de l'écart-type de cette variable aléatoire à sa valeur moyenne.

On montre [22], dans le cas de la mesure d'une densité spectrale par filtrage dans une bande de fréquences de largeur B et intégration pendant la durée T que :

I(59) $$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{BT}}$$

L'écart relatif par rapport à la moyenne est donc d'autant plus faible que BT sera grand. Comme T est imposé, on ne peut augmenter la sélectivité de l'analyse (diminuer B) sans altérer la qualité de l'estimation.

Il en résulte qu'une description théorique très fine des spectres de réponse constitue un objectif « luxueux » et inutile dans la mesure où les excitations subies par la structure ne sont connues avec une précision convenable que par bandes de fréquence. Le point de vue global se trouve donc étayé à nouveau par suite des contraintes expérimentales auxquelles il est impossible d'échapper.

Il s'ensuit que la recherche d'un modèle mathématique de la fonction de Green généralisée sera fondée sur le choix d'une échelle d'analyse globale. En d'autres termes les paramètres dynamiques de la structure seront définis « en moyenne », ce qui revient à considérer le système mécanique comme un élément d'une population de systèmes linéaires, à caractéristiques **non déterministes.**

Nous pensons que cette tentative, appliquée à l'étude de la dynamique vibratoire des structures, est en grande partie originale, tout au moins par son caractère systématique.

Cependant, elle s'appuie évidemment sur des directions de recherche et des modalités de raisonnement qui, dans différents domaines de la physique théorique, se sont montrées fécondes. Certaines analogies de situation de notre problème avec des questions classiques en acoustique ou en physique statistique se sont révélées d'un grand intérêt dans l'élaboration de la théorie que nous allons maintenant exposer.

*

Chapitre II

APPROCHE GLOBALE DE LA DYNAMIQUE VIBRATOIRE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE

1. ORIGINE DES MÉTHODES GLOBALES

Ce chapitre a pour objet de tenter de définir une approche non modale de la dynamique vibratoire d'un système linéaire continu. Nous avons montré, dans la première partie, en relation avec les problèmes posés par la détermination des caractéristiques statistiques de sortie du système soumis à des excitations aléatoires, qu'une telle tentative était nécessaire pour couvrir d'une façon satisfaisante le domaine spectral que nous appelons «haute fréquence» par opposition à la gamme inférieure où sont situées les fréquences des premiers modes naturels de vibration. D'une manière intuitive, mais plus précise, nous dirons que l'approche globale s'applique à ce domaine de fréquences pour lesquelles les longueurs d'onde des vibrations libres du système sont petites devant les dimensions du système ou de la structure en étude.

L'idée de rechercher une méthode globale pour traiter les problèmes de vibration en régime aléatoire, sur des structures, n'est pas originale. Depuis les premières années 1960, une importante école a poursuivi, aux Etats-Unis et en Grande-Bretagne, des travaux considérables relatifs au développement d'une analyse dite «statistique énergétique (S.E.A.)*» [4-11], appliquée aux problèmes de l'excitation acoustique des structures, et vivement impulsée par les nécessités des programmes de vol spatiaux habités. En mettant en contact les disciplines de l'acoustique et de la mécanique vibratoire, celle-ci a pu bénéficier de certains modes de raisonnement de celle-là. C'est ainsi que l'idée de grouper les modes de vibration d'une structure par paquets, en réalisant le passage du discret au continu à l'aide de la notion de **densité modale** [12-13], bien connue des acousticiens et des physiciens du solide, a été introduite. D'autre part, en considérant de ce point de vue global les caractéristiques spatiales du champ acoustique créé par une structure vibrante (constituant ici l'émetteur), en particulier la directivité de ce champ, on a pu montrer, à l'aide d'un principe de réciprocité, l'intérêt d'une estimation globale de la densité spectrale de la force généralisée agissant sur les modes de la structure soumise à des pressions acoustiques extérieures (la structure étant donc considérée maintenant comme récepteur) [4]. Pratiquement, l'estimation de cette dernière quantité est tout à fait forfaitaire : le spectre croisé de la pression acoustique étant donné, on évalue la densité spectrale de force généralisée sur un mode-type dont la déformée est supposée connue, ce qui permet d'aboutir à des relations explicites entre les valeurs moyennes spatiales de sortie et celles de l'excitation. La méthode ne s'affranchit donc pas totalement du schéma modal de la structure et, à cette étape du calcul, n'est pas exempte d'un certain arbitraire.

L'auteur n'a pas connaissance de résultats expérimentaux obtenus sur des structures réelles ayant fourni une confirmation vraiment probante du calcul effectué par des méthodes déduites de la S.E.A. Il est vrai que des incertitudes graves pèsent le plus souvent sur la détermination des caractéristiques statistiques d'entrée, et que, par suite, la critique des résultats et la recherche de leur amélioration s'en trouve compliquée. Au stade actuel des travaux dans le domaine de la S.E.A., on doit à la fois souligner l'intérêt de la conception globale qui en constitue le fondement et, d'autre part, accueillir avec prudence les résultats des prévisions quantitatives qu'elle permet d'obtenir. C'est pourquoi il a semblé nécessaire de proposer une voie d'analyse nouvelle de ces problèmes, intégrant une partie de l'apport méthodologique de l'approche statistique énergétique, mais s'efforçant d'en dépasser les limites en se plaçant de façon systématique dans la perspective d'une

* «*Statistical Energy Analysis*».

étude ststistique globale de la dynamique vibratoire des système linéaires. Nous présentons dans ce chapitre les principaux résultats de cette analyse. Après un rappel de résultats classiques concernant la notion de densité modale et son utilisation en acoustique et en physique statistique, nous en ferons une application au cas de systèmes mécaniques continus, homogènes ou non, dans le cadre de l'approximation dite géométrique. L'hypothèse «d'homogénéité locale» et l'idée d'associer à une structure non homogène une «structure homogène de référence» dont la nature est expliquée en annexe, permettent d'étendre les résultats de l'analyse de *Courant* et *Hilbert* [23] sur des opérateurs différentiels du second ordre du type de Sturm-Liouville, à la distribution des valeurs propres de classes d'opérateurs plus généraux à coefficients variables. On peut ainsi mettre en évidence le rapport existant entre densité modale et temps de propagation de l'énergie et montrer que le rapport de la densité modale d'une structure à sa masse totale est proportionnel à l'admittance d'entrée de la structure homogène de référence associée au problème réel.

L'analyse globale d'une structure **finie** considère ensuite le schéma modal comme un sous-niveau de l'analyse, et, par des moyennes spatio-fréquentielles dont le sens physique est élucidé, établit des relations entre fonction de Green généralisée et fonction de transfert qui peuvent être interprétées en considérant le milieu indéfini homogène associé. On aboutit ainsi à la notion de «structure réverbérante» puis au modèle mathématique idéalisant les caractéristiques dynamiques globales de la structure.

2. DENSITÉ MODALE EN ACOUSTIQUE ET EN PHYSIQUE STATISTIQUE*

2,1. Considérations générales

Dans le domaine de l'acoustique des salles [16], la notion de densité modale a été introduite dans le but de rendre compte, d'une manière globale, de la répartition spatiale et fréquencielle de la pression sonore recueillie à la suite de l'émission d'ondes sonores en un point source.

L'air contenu à l'intérieur d'une enceinte peut être en effet considéré comme formant une multitude de résonateurs élémentaires. L'amplitude de la réponse à un son pur, émis par une source, est une fonction du point de réception dans la salle et de la fréquence propre du résonateur.

Si au contraire la source émet un bruit de spectre étroit centré autour de la même fréquence, plusieurs résonateurs seront excités d'une façon notable : ils seront d'autant plus nombreux que leur fréquences d'accord seront plus voisines (ou plus précisément que leur densité fréquencielle sera plus élevée). Les maxima et les minima d'amplitude étant répartis spatialement d'une manière différente pour chaque résonateur, le niveau de bruit reçu variera moins d'un point à un autre de la salle, et d'autant moins en général que le nombre de résonateurs excités sera plus grand.

On conçoit donc l'intérêt qui s'attache à cette notion de densité des fréquences propres des résonateurs acoustiques, dont nous allons préciser le sens à partir d'un cas simple. Cet exemple nous fournira l'outil mathématique, d'ailleurs très simple lui aussi qui pourra ensuite être mis en œuvre dans l'étude correspondante de la densité modale des structures.

---

* *Nous insisterons surtout sur la présentation de la question dans le cas de l'acoustique des salles, sans doute plus accessible au non-spécialiste. Mais ce sont les physiciens du solide qui font le plus grand usage de ce concept, ainsi que de la représentation des états vibratoires stationnaires dans l'espace des vecteurs d'ondes.*

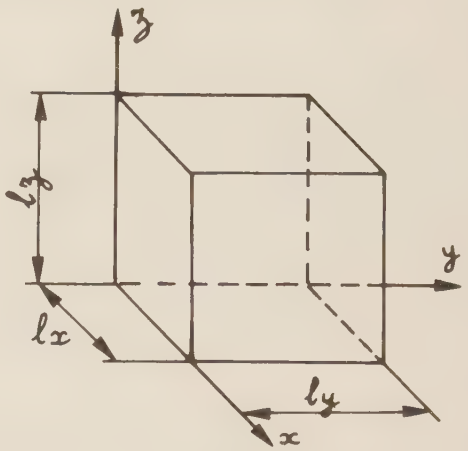
2,2. Modes propres d'une enceinte parallélépipédique

En l'absence de sources, et en négligeant les effets d'absorption des ondes, les vibrations libres sont décrites par l'équation différentielle, aux dérivées partielles :

II(1) $$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

$$\begin{cases} c = \text{vitesse du son} \\ \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \end{cases}$$

où $p(M,t)$ désigne la pression en $M(x,y,z)$ à l'instant t, à l'intérieur de l'enceinte de dimensions l_x, l_y, l_z.



Les ondes stationnaires sont de la forme :

$$p(M,t) = p(M)\exp. j\omega t.$$

Les parois de l'enceinte étant supposées rigides, le gradient de pression suivant la normale aux parois est nul et la solution s'obtient aisément par séparation des variables. On trouve :

II(2) $$p(x,y,z) = A\cos k_x x \cos k_y y \cos k_z z$$

avec

II(3) $$\begin{cases} k = \dfrac{\omega}{c} \\ k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \\ k_x = \dfrac{m\pi}{l_x} \\ k_y = \dfrac{n\pi}{l_y} \\ k_z = \dfrac{q\pi}{l_z} \end{cases} \qquad m, n, q = 0, 1, 2....$$

La solution stationnaire se met donc sous la forme :

II(4) $$p(x,y,z,t) = A\cos k_x x \cos k_y y \cos k_z z \exp. j\omega t$$

qui peut encore s'écrire sous la forme de la combinaison :

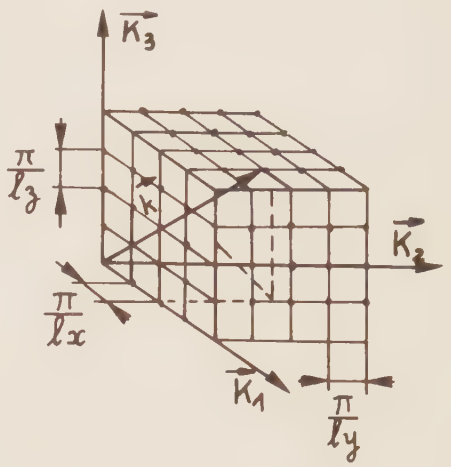
II(5) $$p(x,y,z,t) = \frac{A}{8}\sum \exp j(\omega t \pm k_x x \pm k_y y \pm k_z z)$$

La somme étant étendue aux huit configurations possibles des signes + et –(II(5)) décrit alors la solution stationnaire comme combinaison d'ondes sinusoïdales progressives dont la forme générale est $j(\omega t - \vec{k}.\vec{OM})$ où le vecteur $\vec{k}$ a les composantes $(\pm k_x, \pm k_y, \pm k_z)$ définies dans les relations II(3). La direction de propagation d'une de ces ondes est définie par le vecteur unitaire $\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \vec{u_k}$, et sa vitesse de propagation

suivant $\vec{u_k}$ est $\frac{\omega}{|\vec{k}|}$, c'est-à-dire c (d'après la 1e relation II(3)). La vitesse de propagation de l'onde est donc indépendante de la fréquence et de la direction de propagation : le milieu est non dispersif.

Il est alors intéressant de représenter le vecteur $\vec{k}$ dans l'espace des vecteurs d'ondes $\vec{k_1}, \vec{k_2}, \vec{k_3}$.

D'après ce que nous avons dit précédemment, une solution stationnaire (mode propre) du système est complètement définie par un point représentatif dans l'espace des $\vec{k_i} > 0$.



Les coordonnées de ce point sont $\frac{m\pi}{l_x}, \frac{n\pi}{l_y}, \frac{q\pi}{l_z}$

et la fréquence propre du mode correspondant est $f_{m,n,q} = \frac{|\vec{k}|}{2\pi} c$

Le réseau ainsi défini renseigne donc complètement sur la fréquence (proportionnelle à la longueur du vecteur $\vec{k}$) et sur les entiers m, n, q c'est-à-dire sur la forme propre du mode acoustique.

2,3. Densité modale de l'enceinte

Un mode étant associé à chacun des points du réseau, il est alors facile de dénombrer les modes propres dont la fréquence est inférieure à une fréquence f donnée. Tous les points représentatifs de ces modes sont en effet contenus dans le 1/8 de sphère de rayon

$$\rho = \frac{2\pi f}{c}$$

dont le volume est $V(\rho) = \frac{1}{6} \pi \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^3$

Le volume élémentaire associé à un mode est celui du parallélépipède de dimensions $\frac{\pi}{l_x}, \frac{\pi}{l_y}, \frac{\pi}{l_z}$

soit $\Delta v = \frac{\pi^3}{l_x l_y l_z}$

Le nombre de modes dont la fréquence est inférieure à f est donc

$$N(f) = \frac{V(\rho)}{\Delta v} = \frac{l_x l_y l_z}{6} \pi \left(\frac{2f}{c}\right)^3$$

ou en posant : $V = l_x . l_y . l_z$

II(6) $$N(f) = \frac{4}{3} V \pi \left(\frac{f}{c}\right)^3$$

et la densité modale est :

II(7) $$\bar{n}(f) = \frac{dN}{df}$$

soit $$\boxed{n(f) = \frac{4\pi V}{c^3} . f^2}$$

La densité modale augmente donc comme le carré de la fréquence.

Pour une petite salle de 40 m^3 il existe environ 15 modes par Hz à 1000 Hz, soit 1500 à 10 000 Hz.

REMARQUES

1 - L'inverse de la densité modale exprime l'écart fréquentiel moyen entre les modes.

2 - Le calcul précédent, qui suppose le passage du discontinu au continu, n'est valable qu'aux fréquences relativement élevées, en dessous desquelles il existe un assez grand nombre de modes. Pour la même raison, si l'enceinte possède une dimension (ou 2 dimensions) beaucoup plus petite que les autres (ou l'autre), la « dimension » correspondante du réseau élémentaire du plan des k_i sera grande devant les autres « dimensions », ce qui relève la valeur de la fréquence pour laquelle on peut légitimement appliquer les formules précédentes.

3 - Le calcul précédent s'appuie sur un problème particulier pour lequel les conditions aux limites ont été définies d'une façon précise. On peut démontrer que pour d'autres conditions aux limites (par exemple, enceinte ouverte sur l'une de ses faces) la densité modale est peu affectée, au moins aux fréquences relativement élevées : Il est évident que la description fine de chacun des résonateurs élémentaires considérés au début de ce chapitre doit prendre en considération cette modification des conditions aux limites. En effet, supposons par exemple la paroi située en $x = l_x$ enlevée. La forme propre (en $\cos k_x x$ précédemment) devient alors $\cos\left(\frac{\pi}{2l_x} + k_x\right)$ avec $k_x = \frac{m\pi}{l_x}$. Le réseau subit une translation d'ensemble suivant l'axe k_x d'amplitude égale à $\frac{\pi}{2l_x}$. On conçoit qu'aux fréquences élevées, ceci ait un effet relativement faible sur la densité modale. Par contre le point de vue global que nous avons adopté ici permet d'ignorer, dans une certaine mesure, les effets de ce type de modification et de tirer d'une analyse particulière des enseignements d'ordre assez général. On peut prévoir que cette propriété sera intéressante dans l'étude globale de certaines structures complexes.

4 - On démontre, en outre, que II(7) est également valable pour une enceinte cylindrique (en prenant $V = \pi a^2 l$)

2,4. Distribution angulaire de la densité modale

Nous avons identifié précédemment le vecteur $\vec{k}$ comme le vecteur définissant la direction de propagation de l'énergie suivant un mode particulier (m, n, q) et nous nous proposons maintenant d'examiner comment ces « directions modales » sont distribuées dans l'espace.

Considérons le cas où les modes dont la fréquence f_M est telle que :

$$f - \frac{\Delta f}{2} \leqslant f_M \leqslant f + \frac{\Delta f}{2}$$

sont simultanément excités par une source de fréquence centrale f et de largeur de bande Δf. Un microphone directif, c'est-à-dire sensible seulement à l'énergie acoustique incidente à l'intérieur d'un angle solide $\Delta\Omega$ recueille la pression en un point de la salle. Il est intéressant de savoir combien de modes vont effectivement être captés.

Soit $\vec{\Omega}$ le vecteur unitaire de la direction dans laquelle est orienté le microphone et $\bar{n}'(\Omega, f)$ la distribution angulaire cherchée. Un calcul classique [7] montre alors que :

II(8) $$\bar{n}'(\Omega, f) = \frac{8V}{c^3} f^2$$

ou, en comparant à (II.7)

II(8bis) $$\bar{n}'(\Omega, f) = \frac{2}{\pi}\bar{n}(f)$$

La densité angulaire est donc indépendante de la direction de l'espace dans laquelle on pointe le microphone. On peut dire encore que les directions de propagation de l'énergie sont équiréparties dans l'espace. Chaque onde composante de la solution stationnaire a une «densité de probabilité» de présence dans la direction $\vec{\Omega}$ égale à $\frac{1}{4\pi}$. Comme il y a 8 ondes à prendre en compte pour retrouver le mode propre, le rapport $\frac{\bar{n}'}{\bar{n}}$ est donc égal à $\frac{8}{4\pi} = \frac{2}{\pi}$ ce qu'exprime bien la formule II(8bis).

2,5. Enceinte réverbérante

2,5.1. Le modèle théorique

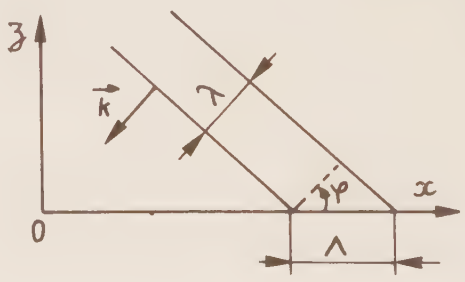
Aux fréquences élevées, on a donc à la fois une densité modale importante et des directions de propagation de l'énergie acoustique équiréparties dans l'enceinte. Si l'on tient compte de la dissipation d'énergie qui affecte chaque mode, notamment par absorption lors des réflexions successives sur les parois, et qui a pour effet d'élargir les «pics» de résonance, on conçoit que la répartition spatiale et fréquencielle de l'énergie sonore tend à devenir uniforme. Le champ acoustique est dit **réverbérant**.

En un point de l'espace arrivent, suivant toutes les directions possibles, des ondes planes dont le cheminement depuis leur émission par la source varie d'une onde à l'autre. A une fréquence donnée, on peut donc considérer que leurs différences de phases sont équiréparties dans $(0, 2\pi)$

Ces propriétés suggèrent la définition d'un **modèle théorique de l'enceinte,** qui idéalise le cas réel aux fréquences élevées.

Si en effet, on imagine une sphère de grand diamètre, sur laquelle sont réparties uniformément des sources acoustiques indépendantes de même fréquence, émettant des ondes acoustiques sphériques -qui, à grande distance des sources, peuvent être assimilées à leur plan tangent- on obtient localement, en un point quelconque éloigné de toutes les sources, un champ acoustique parfaitement réverbérant qui est la limite vers laquelle tend le cas réel évoqué précédemment.

2,5.2. Corrélations spatiales



En régime sinusoïdal de fréquence f, considérons une onde plane élémentaire dont l'incidence par rapport à Ox est φ. Soit $\lambda = \frac{2\pi}{|k|}$ sa longueur d'onde. La longueur d'onde apparente sur Ox est

II(9) $$\Lambda = \frac{\lambda}{\cos\varphi}$$

et si on s'intéresse uniquement à ce qui se passe sur Ox, on doit écrire que la propagation suivant cette direction est de la forme :

$$\cos\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\Lambda}\right) = \cos\left(\omega t - k_x \cos\varphi\right)$$

En deux points d'abscisses x et $x' = x + \xi$, la pression à l'instant t a pour valeurs :

$$p(x,t) = p_o \cos(\omega t - kx \cos\varphi)$$
$$p(x',t) = p_o \cos(\omega t - kx' \cos\varphi)$$

et la corrélation spatiale instantanée à la fréquence f, s'écrit :

$$R_p(x,x') = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_o^T p(x,t)\, p(x',t)\, dt$$

soit II(10)
$$R_p(x,x') = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_o^T p_o^2 \cos(\omega t - kx\cos\varphi) \cos(\omega t - kx'\cos\varphi)\, dt$$

ou
$$R_p(x,x') = \frac{p_o^2}{2} \cos(k\xi\cos\varphi)$$

Alors, le coefficient de corrélation spatiale est :

II(11)
$$\eta_p(x,x') = \frac{R_p(x,x')}{\left[R_p(x,x')\, R_p(x',x')\right]^{1/2}}$$

soit, avec
$$R_p(x,x) = R_p(x',x') = \frac{p_o^2}{2}$$

II(12)
$$\boxed{\eta_p(x,x') = \cos(k\xi\cos\varphi)}$$

Passons maintenant au cas du champ réverbérant tridimensionnel défini au paragraphe précédent. Toutes les incidences étant équiprobables avec une densité $\frac{d\Omega}{4\pi}$, et chacune des sources étant indépendante des autres, le coefficient de corrélation spatiale entre x et x' est la valeur moyenne de II(12) pour l'ensemble des directions, soit :

II(13)
$$\eta_p(x,x') = \frac{1}{4\pi} \int_o^{\pi} \int_o^{2\pi} \cos(k\xi\cos\varphi) \sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$

ou
$$\boxed{\eta_p(x,x') = \frac{\sin k\xi}{k\xi}} \qquad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi f}{c} \quad \text{et} \quad \xi = x' - x$$

En régime aléatoire, II(13) est aussi le coefficient de corrélation croisé entre les deux points, pour la composante de fréquence f du spectre (on l'appelle également parfois la cohérence de la pression en ces deux points). La mesure de ce coefficient dans le cas d'une enceinte réelle, et son écart par rapport au résultat théorique II(13) permet de juger du degré d'approximation du cas idéal effectivement réalisé en pratique.

REMARQUES

a) Le même schéma général, s'applique au cas d'un champ acoustique réverbérant bidimensionnel, c'est-à-dire où tous les vecteurs $\vec{k}$ sont situés dans le même plan, (les sources acoustiques du modèle sont alors réparties sur une circonférence à l'infini). En appliquant le raisonnement précédent on trouve [24-25] :

II(14)
$$\eta_p(x,x') = \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} \cos(k\xi\cos\varphi)\, d\varphi$$

$$\boxed{\eta_p(x,x') = J_o(k\xi)}$$

J_o *étant la fonction de Bessel de première espèce, et d'ordre zéro.*

b) La méthode globale utilisée précédemment suppose qu'il est légitime de remplacer le problème discontinu, provenant de la représentation modale des vibrations dans le milieu, par un problème continu : on a montré que cette simplification devient de plus en plus admissible quand la fréquence s'élève, ou, plus précisément, quand on peut admettre que les longueurs d'onde de travail sont petites devant les dimensions de la cavité.

2,6. Densité modale en physique statistique

Le concept de densité modale est d'un usage courant en physique statistique. Il intervient par exemple dans l'étude de l'équilibre du rayonnement contenu dans une enceinte isotherme, ainsi que dans la théorie de la chaleur spécifique des solides.

Dans l'un et l'autre cas, on est conduit à des sommations sur des modes discrets, mais de fréquences très voisines. Il est alors beaucoup plus commode de remplacer ces sommes par des intégrales, en faisant intervenir la densité de modes.

Par exemple, l'évaluation de la chaleur spécifique d'un solide passe par celle de l'énergie vibratoire des atomes de son réseau cristallin, mis en mouvement par l'excitation thermique. On démontre que chaque mode d'indice q, de fréquence ν_q, contribue à cette énergie par la quantité $\varepsilon_q = \left(p_q + \frac{1}{2}\right) h\,\nu_q$, où p_q est le nombre de quanta d'énergie contenus dans ce mode (intensité de l'excitation), h étant la constante de Planck. Dans le cas des vibrations thermiques, les p_q obéissent à la statistique de Bose-Einstein. A la température T, leur valeur moyenne est :

$$\bar{p}_q = \frac{1}{e^{(h\nu_q / kT)} - 1}$$

où k est la constante de Boltzmann. L'énergie moyenne du mode q est donc

$$\bar{\varepsilon}_q = \frac{h\nu_q}{e^{(h\nu_q / kT)} - 1}$$

On groupe alors dans le même niveau d'énergie tous les modes de fréquences comprises entre ν et $\nu + d\nu$ en nombre $dn = \bar{n}(\nu)\,d\nu$. Ces modes sont **physiquement discernables,** c'est-à-dire qu'une étude théorique permet de dénombrer les configurations internes de vibration du système, sous forme d'ondes stationnaire, dont les fréquences sont comprises entre ν et $\nu + d\nu$. Aucun d'eux ne peut cependant être mis en évidence par voie expérimentale : on dit que dn caractérise l'ordre de dégénérescence du système à la fréquence ν. On est ainsi amené à calculer l'énergie vibratoire moyenne, à la température T, en remplaçant $\Sigma_q \bar{\varepsilon}_q$ par une expression de la forme

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{h\nu}{e^{(h\nu / kT)} - 1}\,\bar{n}(\nu)\,d\nu$$

où $\bar{n}(\nu)$ est encore la densité modale du système.

L'analogie de situation entre cet exemple -où la notion de mode n'est utilisée que pour la compréhension physique des choses, et comme intermédiaire de calcul entièrement privé de contenu expérimental-, avec le problème déjà évoqué pour les structures est ici très remarquable.

3. LA NOTION DE DENSITÉ MODALE APPLIQUÉE AUX STRUCTURES

3,1. Structure localement homogène. Approximation géométrique

Nous allons maintenant étudier la distribution des fréquences propres de vibration de structures conservatives, dont la répartition des caractéristiques élastiques et massique sera supposée **homogène**, ou seulement **localement homogène** c'est-à-dire, en première approximation, homogène à l'échelle de la « longueur d'onde » des vibrations considérées [26]. Cette dernière hypothèse constitue, par analogie avec l'optique, **l'approximation géométrique** [27] de notre problème : nous en exposerons les principaux aspects en annexe et nous nous limiterons donc ici à une introduction succincte.

3,1.1. Propagation d'ondes et densité modale : problème monodimensionnel

Considérons pour cela un problème monodimensionnel en milieu **indéfini** : par exemple celui d'une poutre d'axe $O\mathcal{X}$, en flexion, dont les vibrations libres $w(\mathcal{x},t)$ sont solution de l'équation :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{x}^2} \left[EI \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{x}^2} \right] + \bar{\rho} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} w(\mathcal{x},t) = 0$$

où EI et $\bar{\rho}$ sont des fonctions lentement variables de l'abscisse $\mathcal{x}$. Le formalisme de l'approximation géométrique se traduit ici par la recherche de solutions de la forme :

$$w(\mathcal{x},t) = W(\mathcal{x}) \exp j\left(\omega t - k_0 u(\mathcal{x})\right)$$

qui est bien identique à la solution classique en milieu homogène $\left(EI = (EI)_0 \; ; \; \bar{\rho} = \bar{\rho}_0\right)$ en posant $u(\mathcal{x}) = \mathcal{x}$ et $W(\mathcal{x}) = W_0$ avec la relation de dispersion :

$$\omega^2 = \frac{(EI)_0}{\bar{\rho}_0} k_0^4$$

Alors, la fréquence **spatiale** de l'onde, à l'abscisse $\mathcal{x}$, est

$$\gamma_s(\mathcal{x}) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mathcal{x}} \left(k_0 u(\mathcal{x})\right) = \frac{k_0}{2\pi} \frac{du}{d\mathcal{x}}$$

En d'autres termes, le nombre de passages par zéro, par unité de longueur suivant $O\mathcal{X}$, est :

$$\zeta(\mathcal{x}) = 2\gamma_s(\mathcal{x}) = \frac{k_0}{\pi} \frac{du}{d\mathcal{x}}$$

On montre en annexe que $\frac{du}{d\mathcal{x}}$ possède la signification d'un **indice local de réfraction** puisque, dans notre approximation, l'équation du mouvement impose la condition :

$$\frac{du}{d\mathcal{x}} = \left[\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} \frac{(EI)_0}{EI} \right]^{1/4} = \frac{C_0}{C(\mathcal{x})}$$

où C_0 et $C(\mathcal{x})$ désignent respectivement les vitesses de phase de l'onde de pulsation ω , dans le milieu homogène pris comme **référence** d'une part, et dans le milieu non homogène, au point d'abscisse $\mathcal{x}$, d'autre part (C_0 et C dépendent en général de la fréquence -c'est en particulier le cas dans l'exemple choisi ici- mais leur rapport n'est fonction que de l'abscisse $\mathcal{x}$).

Revenant maintenant au calcul du nombre de zéros, considérons un tronçon de poutre de longueur L. L'onde de pulsation ω possède $m(L)$ zéros entre 0 et L, avec :

$$m(L) = \int_0^L \zeta(\mathcal{x})\, d\mathcal{x} = \frac{k_0}{\pi} u(L)$$

et, de la même manière, sur la poutre homogène de longueur L_o , ce nombre sera

$$m_o(L_o) = \frac{k_o}{\pi} L_o$$

Alors, si on impose la condition $m(L) = m_o(L_o)$, c'est-à-dire en définitive que l'évolution de phase est identique sur les deux spécimens pour les longueurs L et L_o , on aura

A(24) $$u(L) = \int_o^L \frac{du}{dx}\, dx = L_o$$

Effectuons maintenant un balayage en fréquence croissante en dénombrant les fréquences f_1 , f_2 ... f_p correspondant à la présence de 1, 2, ... p zéros sur la structure entre 0 et L. On passera de f_i à f_{i+1} en augmentant de 1 le nombre $m(L)$ soit $\Delta m(L) = 1$, c'est-à-dire encore :

$$\Delta k_o = \frac{\pi}{L_o}$$

Les nombres d'ondes k_o sont donc également espacés, avec l'intervalle $\frac{\pi}{L_o}$, et, pour connaitre le nombre de fréquences f_i inférieures à f_p et correspondant à un nombre entier de zéros sur la partie entre 0 et L, il suffit de dénombrer les zéros de l'onde de fréquence f_p . De la même manière, entre f_p et $f_p + \delta f$ on trouvera un accroissement de $m(L)$ à $m(L) + \delta m$ avec

$$\delta m = \frac{L_o}{\pi} \left(\frac{\partial k_o}{\partial f} \right) \delta f = \frac{2 L_o}{V_{g_o}(f_p)} \delta f$$

où $V_{g_o}(f)$ représente la vitesse de groupe des ondes de fréquence f .

Le taux de l'accroissement a donc pour valeur :

A(35) $$\boxed{\bar{n}(f) = \frac{2 L_o}{V_{g_o}(f)}}$$

et cette quantité représente la **densité modale** de la poutre homogène de **longueur finie Lo** associée à la poutre réelle.

En effet, on peut montrer (cf. annexe) que les solutions libres de cette poutre tendent, en conditions «asymptotiques» ($k_o L_o \gg 1$) vers une combinaison d'exponentielles de la forme $\exp j(\omega t \pm k_o x)$, avec la condition $\Delta k_o = \frac{\pi}{L_o}$ lorsque l'on passe d'un mode de rang i à un mode de rang $i+1$. Dans ces conditions, le comptage des zéros réalisé ci-dessus revient également au comptage des nœuds de vibration stationnaires. En définitive, le calcul précédent conduit donc à la densité des **fréquences propres** de la poutre finie, c'est-à-dire à sa densité modale.

3,1.2. Remarques : Densité modale et temps de parcours de l'énergie

a) Ce résultat a été obtenu en associant à la structure réelle, localement homogène, une **structure homogène de référence** possédant, **par construction,** le même nombre de nœuds pour les mêmes fréquences propres. La densité modale calculée est donc également celle de la poutre réelle. En posant $\frac{1}{U(x,f)} = \frac{\partial^2}{\partial \omega\, \partial x} [k.u]$ où $U(x,f)$ désigne la **vitesse locale** de propagation de l'énergie, au point x , il vient immédiatement :

A(37) $$\bar{n}(f) = 2 \int_o^L \frac{dx}{U(x,f)} \quad \left(= \frac{2 L_o}{V_{g_o}(f)} \right)$$

b) *Biot* [29] a démontré, sous des hypothèses très générales, l'équivalence entre la vitesse de groupe et la vitesse de propagation de l'énergie. La quantité $\frac{2L_o}{V_g(f)}$ représente donc **la durée de la propagation de l'énergie sur la distance $2L_o$, pour un paquet d'ondes centré à la fréquence f, de largeur spectrale égale à 1 Hz, cheminant sur la structure indéfinie.**

Les expressions A(35) et A(37), qui ne semblent pas avoir déjà été proposées par d'autres auteurs, établissent donc l'identité entre densité modale d'une structure finie et durée du parcours de l'énergie sur un tronçon de même longueur appartenant à la structure indéfinie. Sous une forme particulièrement simple ici, ce résultat exprime en définitive le fait que la densité modale du milieu de dimensions finies est indépendante des conditions aux limites particulières du problème.

3,1.3. Densité d'énergie et masse généralisée

Dans l'approximation géométrique, on peut montrer que la loi d'évolution de l'amplitude $W(x)$ obéit à l'équation

$$\frac{\bar{\rho}(x)\, W^2(x)}{du/dx} = \bar{\rho}_o\, W_o^2 = Cte$$

où le membre de droite est proportionnel à la densité d'énergie de l'onde de fréquence f sur la structure homogène de référence. On en déduit aisément (cf. annexe) que, si la structure de référence possède une masse totale M_{oT} égale à celle de la structure réelle, **les masses généralisées des modes homologues sont égales.** Dans notre exemple monodimensionnel, on a alors, quel que soit l'ordre du mode :

A(38) $$\mu = \frac{M_{oT}}{2}$$

(W_o étant normalisé à 1 mètre).

3,2. Densité modale d'une structure homogène

3,2.1. Propagation d'ondes en milieu indéfini

Les hypothèses de l'approximation géométrique permettent, dans les problèmes à deux ou trois dimensions, de ramener l'étude des structures localement homogènes à celle d'un problème homogène associé. C'est donc dans ce dernier cas que nous allons maintenant nous situer pour calculer la densité modale d'une structure bi ou tridimensionnelle. Dans le souci de faciliter l'exposé, nous nous limiterons ici à l'étude d'une **structure homogène mince,** c'est-à-dire à un problème bidimensionnel.

Nous supposerons également, pour simplifier la présentation, que le déplacement de tout point M à lieu suivant une direction privilégiée prépondérante correspondant à la variable $w(M,t)$.

Les solutions libres du problème vibratoire satisfont donc à l'équation du mouvement, de la forme :

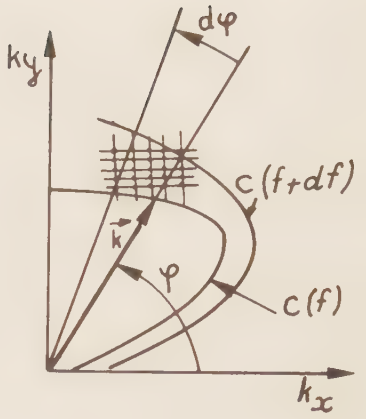
II(15) $$\mathcal{L}_{M,t}\, w(M,t) = 0$$

où $\mathcal{L}_{M,t}$ est un opérateur différentiel, aux dérivées partielles suivant les coordonnées d'espace et de temps, à coefficients constants.

En milieu indéfini, les solutions de cette équation qui correspondent à des ondes progressives sont de la forme $W_o \exp j(\omega t - \vec{k}\vec{M})$ et, pour une pulsation ω fixée, II(15) impose à k_x et k_y de vérifier la relation de dispersion :

II(16)a $$D(k_x, k_y) = \omega^2$$

c'est-à-dire que l'extrémité du vecteur $\vec{k}$ doit être située sur la courbe $C(f)$, d'équation II(16), dans le plan des vecteurs d'ondes. Toute onde plane de pulsation ω cheminant sur la structure indéfinie dans la direction φ peut donc être représentée par un point de la courbe $C(f)$ (fig. 4) défini, soit par II(16), soit par le rayon polaire :



II(16)b $$k = |\vec{k}| = \bar{k}(\varphi, f)$$

Considérons alors, toujours en milieu indéfini, un paquet d'ondes cheminant dans des directions comprises entre φ et $\varphi + d\varphi$, avec des fréquences comprises entre f et $f + df$, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, avec des nombres d'ondes k compris entre k et $k + dk$ Comme à chaque onde est associé un point du plan (k_x, k_y), on doit associer à l'ensemble des ondes du paquet l'aire élémentaire $k\, dk\, d\varphi$ c'est-à-dire, d'après II(16b), l'aire

$$2\pi \bar{k} \left| \frac{\partial \bar{k}}{\partial \omega} \right| df.\, d\varphi.$$

Introduisant alors la vitesse de groupe

II(17) $$V_g(\varphi, f) = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

on peut dire que le paquet d'ondes « occupe » l'aire

II(18) $$d\Gamma_k = 2\pi \frac{\bar{k}(\varphi, f)}{|V_g(\varphi, f)|} df.\, d\varphi$$

Ce résultat va nous permettre de calculer la distribution angulaire des fréquences propres de la structure finie.

3,2.2. Distribution angulaire de la densité modale

Les modes propres de la structure finie sont également solution de II(15), et vérifient les conditions aux limites imposées, ce qui se traduit, nous l'avons vu, par une représentation discrète dans le plan des vecteurs d'ondes : à chaque mode propre est alors associé une maille élémentaire du réseau, de côtés Δk_x et Δk_y avec :

II(19) $$\Delta k_x = \frac{\pi}{L_{ox}} \quad , \quad \Delta k_y = \frac{\pi}{L_{oy}}$$

L_{ox} et L_{oy} désignant des dimensions de la structure, mesurées suivant des axes de coordonnées curvilignes orthogonales sur la surface moyenne, et respectivement égale aux demi-longueurs d'ondes fondamentales suivant Ox et Oy.

Soit alors $\bar{n}'(\varphi, f)$ la distribution angulaire de la densité modale, c'est-à-dire que le nombre de modes dont les fréquences sont comprises entre f et $f + df$ et dont les directions de propagation sont situées entre φ et $\varphi + d\varphi$ est $\bar{n}'(\varphi, f)\, d\varphi\, df$. Dans le plan des k, ces modes « occupent » la même aire que le paquet d'ondes libres examiné au paragraphe précédent soit :

$$\bar{n}'(\varphi, f)\, \Delta k_x\, \Delta k_y\, d\varphi\, df = d\Gamma_k$$

En comparant cette expression avec II(18), il vient :

$$\bar{n}'(\varphi, f)\, \Delta k_x\, \Delta k_y = 2\pi \frac{\bar{k}(\varphi, f)}{|V_g(\varphi, f)|}$$

ou, en utilisant II(19), après avoir posé $A_o = L_{ox} L_{oy}$:

II(20)
$$\boxed{\bar{n}'(\varphi, f) = \frac{2A_o}{\pi} \frac{\bar{k}(\varphi, f)}{|V_g(\varphi, f)|}}$$

3,2.3. Remarques

a) Le rapport de la distribution angulaire de la densité modale à l'aire de la structure, $\frac{\bar{n}'(\varphi, f)}{A_o}$ est indépendant des dimensions de la structure et s'exprime, comme le montre II(20), en fonction des caractéristiques k et V_g de la propagation des ondes dans le milieu indéfini. Notre calcul suppose en effet que $|k|$ est grand devant les dimensions Δk_x et Δk_y de la maille élémentaire du réseau (autrement dit, les longueurs d'onde de travail sont petites devant les dimensions de la structure). Il est donc équivalent de supposer que, pour une longueur d'onde donnée, ce sont les dimensions de la structure qui tendent vers l'infini. Nous verrons ultérieurement d'autres aspects intéressants de cette équivalence entre la structure finie et la structure indéfinie.

b) En posant $D = \frac{2A_o}{\bar{\lambda}}$, avec $\bar{\lambda} = \frac{2\pi}{\bar{k}}$ II(21) peut encore s'écrire sous la forme :

$$V_g = \frac{2D(\varphi, f)}{\bar{n}'(\varphi, f)}$$

Alors, comme la vitesse de groupe est, sous des hypothèses très générales, identique à la vitesse de propagation de l'énergie (29) , $\bar{n}'(\varphi, f)$ apparaît ici comme un temps caractéristique de cette propagation sur une distance caractéristique D, dans la direction φ , au voisinage de la fréquence f (cf. annexe, A(64)).

3,2.4. Densité modale

On a évidemment, pour la densité modale :

II(21)
$$\bar{n}(f) = \int_0^{\pi/2} \bar{n}'(\varphi, f)\, d\varphi$$

ou encore suivant le calcul effectué précédemment en acoustique :

II(7)
$$\bar{n}(f) = \frac{dN}{df}$$

avec
$$N(f) = \frac{1}{\Delta k_x \Delta k_y} \iint_{\mathcal{D}} dk_x\, dk_y$$

$\mathcal{D}$ désignant le domaine du plan (k_x, k_y) contenant les points représentatifs des modes de fréquence inférieure à la fréquence f.

Nous verrons, au chapitre III, quelques applications concrètes de ces résultats à des problèmes réels.

3,3. Densité de probabilité de présence d'un mode associé à une direction de propagation donnée

Nous avons été amenés, au paragraphe 3,1, à associer à un paquet d'ondes cheminant **dans la structure indéfinie,** dans une direction comprise entre φ et $\varphi+d\varphi$, de fréquence comprise entre f et $f+df$ une aire élémentaire du plan réciproque des vecteurs d'onde définie par $d\nabla_k$ (formule II(18)).

La probabilité pour qu'une propagation ait lieu à l'intérieur de l'angle $\varphi, \varphi+d\varphi$, à la fréquence f , est donc :

$$p(\varphi, f)\, d\varphi = \frac{d\nabla_k}{\int_\varphi d\nabla_k}$$

soit, en utilisant II(18) :

II(22)a
$$p(\varphi, f) = \frac{\bar{k}(\varphi, f)}{|V_g(\varphi, f)| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\bar{k}(u, f)/|Ng(u, f)|\right] du}$$

Il en résulte que, en milieu indéfini, toutes les directions de propagation ne sont pas, en général, équiprobables. Pour les vibrations considérées, le milieu est donc à la fois **dispersif** et **directif.** La densité de probabilité $p(\varphi, f)$ caractérise la directivité de la structure.

On remarque alors que, moyennant les hypothèses de calcul des paragraphes précédents, cette propriété garde un sens dans le cas d'un milieu **fini**. Il vient en effet, en utilisant II(20) et II(21) pour calculer II(22a) :

II(22)b
$$\boxed{p(\varphi, f) = \frac{\bar{n}'(\varphi, f)}{\bar{n}(f)}}$$

qui exprime maintenant la densité de probabilité de présence d'un **mode de la structure finie**, à la fréquence f, dans la direction φ de l'espace réciproque.

On remarquera que le passage du discret au continu, à l'aide de la notion de densité modale, a pour traduction spatiale le passage du milieu fini au milieu infini dont II(22-b) exprime un aspect particulier.

4. FONCTION DE TRANSFERT ET ADMITTANCE D'ENTRÉE D'UNE STRUCTURE CONSERVATIVE BIDIMENSIONNELLE INFINIE

Nous allons établir quelques résultats relatifs au comportement dynamique d'une structure infinie, nécessaire à l'interprétation de l'analyse globale d'une structure finie qui fera l'objet des paragraphes 5 et 6.

4,1. Réponse impulsionnelle et fonction de transfert vitesse

Considérons une structure bidimensionnelle de dimension infinie. **La réponse-vitesse** à une impulsion appliquée à l'origine $x=y=0$ à l'instant initial $t=0$, est solution de l'équation :

II(23)
$$\mathcal{L}_{M,t}\, h_{v\infty}(M, t) = \frac{1}{\rho}\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(t)$$

où $\mathcal{L}_{M,t}$ désigne l'opérateur défini au paragraphe 3,1, $\bar{\rho}$ est la masse surfacique de la structure et $\dot{\delta}(t)$ la dérivée par rapport au temps de la distribution de Dirac δ .

Par une transformation de Fourier tridimensionnelle (sur les variables spatiales et temporelle), on obtient classiquement :

II(24) $$h_{V\infty}(M,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}(k_x, k_y, \omega) \exp j(\omega t + k_x x + k_y y)\, d\omega\, dk_x\, dk_y$$

II(25) avec $$\bar{V}(k_x, k_y, \omega) = \frac{j\omega}{\bar{\rho}\,[\mathcal{D}(k_x, k_y) - \omega^2]}$$

Les pôles de $\bar{V}(k_x, k_y, \omega)$ sont solution de II(16) c'est-à-dire, pour ω fixé, correspondent aux nombres d'ondes des solutions libres du problème. La fonction de transfert vitesse entre le point origine et le point M est d'autre part :

II(26) $$H_{V\infty}(M,f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}(k_x, k_y, \omega) \exp . j(k_x x + k_y y)\, dk_x\, dk_y$$

puisque $h_{V\infty}(M,t)$ et $H_{V\infty}(M,f)$ se correspondent par transformation de Fourier.

Le calcul de II(24) et II(26) ne peut être mené à terme que dans un petit nombre de cas simples (plaque plane en flexion par exemple). En général, on ne peut aboutir à une solution explicite qu'au moyen de méthodes approchées dont nous verrons ultérieurement des exemples. Toutefois, il est possible de franchir une première étape dans l'intégration de II(24) et II(26) : passons pour cela en coordonnées polaires :

II(27) $$\begin{cases} k_x = k \cos\varphi \\ k_y = k \sin\varphi \end{cases}$$

ce qui donne :

II(28) $$h_{V\infty}(M,t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp . j\omega t\, d\omega \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{j\omega}{\bar{\rho}[\bar{\omega}^2 - \omega^2]} \exp\left[jk(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\right] k\, dk\, d\varphi$$

et

II(29) $$H_{V\infty}(M,f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{j\omega}{\bar{\rho}[\bar{\omega}^2 - \omega^2]} \exp\left[jk(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\right] k\, dk\, df$$

où $\bar{\omega}$ représente maintenant la pulsation d'une onde libre de la structure infinie, de nombre d'onde k , cheminant dans la direction définie par l'angle φ ($\bar{\omega}$ est donc solution de II(16)). Inversement, à tout nombre d'ondes k dans II(28) et II(29), correspondant à une propagation dans la direction φ , on peut associer une pulsation $\bar{\omega}$ définissant celle d'une solution libre. Prenons alors comme variable d'intégration cette pulsation $\bar{\omega}$. On a le changement de variables :

II(30) $$\begin{cases} k = \bar{k}(\varphi', \bar{f}) \\ \varphi = \varphi' \end{cases} \qquad \left(\bar{f} = \frac{\bar{\omega}}{2\pi}\right)$$

II(29) devient alors :

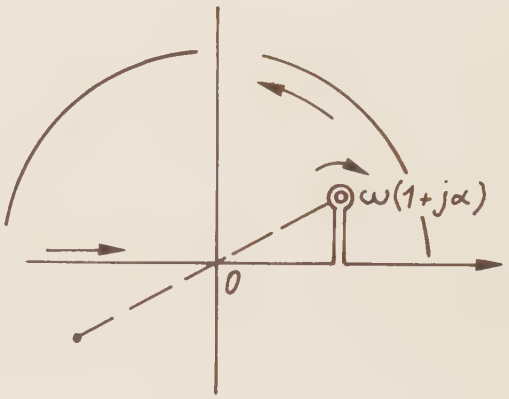
$$H_{V\infty}(M,f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{j\omega}{\bar{\rho}[\bar{\omega}^2 - \omega^2]} \exp\left[j\bar{k}(\varphi', \bar{f})(x\cos\varphi' + y\sin\varphi')\right] \times \ldots$$
$$\ldots \bar{k}(\varphi', \bar{f}) \left|\frac{\partial k}{\partial \bar{\omega}}\right| d\bar{\omega}\, d\varphi$$

L'intégration suivant $\bar{\omega}$ se fait alors aisément par la méthode des résidus. On tient compte pour cela de la dissipation dans la structure, c'est-à-dire que l'on prend pour ω la valeur complexe $\omega(1+j\alpha)$, qui est d'autre part le seul pôle situé au-dessus de l'axe réel. L'intégrant étant pair en $\bar{\omega}$, on peut écrire

$$H_{V\infty}(M,f) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j\omega}{\bar{\rho}\left[\bar{\omega}^2-\omega^2\right]} \exp\left[j\bar{k}(x\cos\varphi'+y\sin\varphi')\right] \bar{k}\left|\frac{\partial\bar{k}}{\partial\bar{\omega}}\right| d\bar{\omega}$$

Le résidu pour $\bar{\omega}_1 = \omega(1+j\alpha)$ vaut

$$\frac{-j\omega}{2\bar{\rho}\,\bar{\omega}_1}\left\{\exp\ jk(x\cos\varphi'+y\sin\varphi')\times k\left|\frac{\partial\bar{k}}{\partial\omega}\right|\right\}_{\bar{\omega}_1}$$



soit en définitive, après avoir fait tendre α vers zéro et remplacé φ' par φ

$$\text{II(32)}\quad H_{V\infty}(M,f) = \frac{1}{8\pi\bar{\rho}}\int_0^{2\pi} \bar{k}(\varphi,f)\left|\frac{\partial\bar{k}}{\partial\omega}(\varphi,f)\right| \exp j\bar{k}(x\cos\varphi+y\sin\varphi)\, d\varphi$$

En remarquant alors que $\bar{k}$ est le nombre d'ondes de la solution libre de fréquence ω, on voit que la solution résulte de la superposition d'ondes libres se propageant dans toutes les directions φ avec une distribution d'amplitude égale à

$$\bar{k}\times\left|\frac{\partial\bar{k}}{\partial\omega}\right| = \frac{\bar{k}(\varphi,f)}{|V_g(\varphi,f)|}$$

La fonction de transfert entre l'origine et le point M résulte donc de la superposition d'ondes planes, solution libre de II(15), c'est-à-dire vérifiant les relations II(16), dont la distribution d'amplitude en fonction de l'azimut est donnée par $\frac{k(\varphi,f)}{|V_g(\varphi,f)|}$. En raison de la condition de Sommerfeld (non-réflexion à l'infini), cette distribution doit être limitée à des ondes qui vont de 0 vers M ; autrement dit, pour $M \neq 0$, l'intégration en φ doit, dans l'expression ci-dessus être limitée à l'intervalle $(0, \pi)$. Par contre, à l'origine $(M=0)$, on doit tenir compte de toutes les directions possibles dans l'intervalle $(0, 2\pi)$.

En résumé, on a donc :

$$\text{II(33)}\quad H_{V\infty}(M,f) = \frac{1}{8\pi\bar{\rho}}\int_0^{\pi} \frac{\bar{k}(\varphi,f)}{|V_g(\varphi,f)|} \exp\left[j\bar{k}(x\cos\varphi+y\sin\varphi)\right] d\varphi$$

pour $M \neq 0$, et :

$$\text{II(34)}\quad H_{V\infty}(0,f) = \frac{1}{8\pi\bar{\rho}}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{k}(\varphi,f)}{|V_g(\varphi,f)|}\, d\varphi$$

et

$$\text{II(35)}\quad h_{V\infty}(M,t) = \frac{1}{2\pi}\,\mathcal{R}_e\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} H_{V\infty}(M,f)\exp.\,j\omega t\, d\omega\right\}$$

4,2. Liaison avec la densité modale d'une structure finie

On peut établir un lien entre ces résultats, valables pour un milieu indéfini, et ceux que nous avons obtenus au paragraphe 3 dans l'étude de la densité modale d'une structure finie. En utilisant II(20) et la remarque (3.3a), on peut écrire l'admittance d'entrée $H_{V\infty}(0,f)$ sous la forme :

$$H_{V\infty}(0,f) = G_{V\infty}(f) = \frac{1}{16\bar{\rho}A_0}\int_0^{2\pi}\bar{n}'(\varphi,f)\,d\varphi$$

soit, en raison de II(21), après avoir posé $M_{0T} = \bar{\rho}A_0$

II(36)
$$\boxed{G_{V\infty}(f) = \frac{\bar{n}(f)}{4M_{0T}}}$$

C'est la première fois, à notre connaissance, que la démonstration générale de ce résultat est représentée. L'admittance d'entrée d'une structure homogène bidimensionnelle infinie est réelle et égale au quart du rapport de la densité modale à la masse de la structure finie de référence obéissant à la même équation du mouvement II(15).

En raisonnant de manière identique, on peut écrire la fonction de transfert de la structure indéfinie (II(33)) sous la forme :

II(37)
$$H_{V\infty}(M,f) = \frac{1}{16M_{0T}}\int_0^{\pi}\bar{n}'(\varphi,f)\exp\left[j\bar{k}(x\cos\varphi + y\sin\varphi)\right]d\varphi$$

et nous montrerons que, sous certaines hypothèses, la fonction de transfert moyenne de la structure **de dimensions finies** peut être liée simplement à II(37).

Enfin, on remarquera qu'en vertu des résultats obtenus dans la première partie, paragraphe 2,1.d), on peut interpréter II(36) comme la **densité spectrale de la puissance fournie** au système par une force de spectre blanc. La densité modale d'une structure finie prend ainsi une signification **énergétique,** sur laquelle nous insisterons davantage dans l'étude globale d'une structure finie.

5. ANALYSE GLOBALE D'UNE STRUCTURE BIDIMENSIONNELLE FINIE

Nous reprenons maintenant l'analyse d'une **structure finie homogène ou localement homogène**, et nous allons nous efforcer de montrer que, si le mouvement est exprimé dans la base des modes naturels de vibration de la structure, il est possible de retrouver les résultats précédents, valables pour une structure indéfinie, en opérant des moyennes fréquentielles et spatiales. Nous noterons $\langle u(M)\rangle$ la moyenne spatiale de la fonction u, c'est-à-dire, dans le cas bidimensionnel :

II(38)
$$\langle u(M)\rangle = \frac{1}{A}\int_{\Sigma_0} u(M)\,dM$$

A désignant l'aire de Σ_o . Alors, la notation $\langle \tilde{U}(M,f) \rangle$ indiquera l'opération de moyenne spatiale et fréquencielle sur la fonction U . Nous remarquerons que **les résultats qui vont suivre seraient encore valables dans un cas tridimensionnel** : la limitation imposée ici au traitement de milieux élastiques minces ne se justifie donc que par la nécessité de la confrontation avec ce qui a été dit au paragraphe 4 pour un milieu bidimensionnel indéfini.

5,1. Puissance fournie à la structure en régime aléatoire

Admittance d'entrée moyenne

Nous avons vu au chapitre I que la puissance fournie à une structure par une force aléatoire appliquée en M, pouvait s'exprimer par :

II(39) $$P(M) = \Gamma_{FV}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{V_{fini}}(M,f)\ S_{FF}(f)\ df$$

où l'on a utilisé I(12bis) et I(14). $G_{V_{fini}}(M,f)$ **est l'admittance d'entrée** au point M et $S_{FF}(f)$ le spectre de puissance de la force excitatrice.

Considérons alors le cas d'une excitation de spectre blanc : $S_{FF}(f) = S_o$ et explicitons $G_{V_{fini}}(M,f)$ dans la base modale c'est-à-dire, d'après I(27) et I(29) :

II(40) $$G_{V_{fini}}(M,f) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{j\omega}{\mu_i\left(\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\alpha_i\omega_i\omega\right)}\ \psi_i^2(M)$$

En reportant dans II(39), il vient :

$$P(M) = \sum_{i=1}^{\infty} S_o\ \psi_i^2(M) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j\omega}{\mu_i\left(\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\alpha_i\omega_i\omega\right)} \frac{d\omega}{2\pi}$$

L'intégrale est réelle et vaut $\frac{1}{2\mu_i}$, ce qui donne :

II(41) $$P(M) = S_o \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2\mu_i}\psi_i^2(M)$$

Chaque mode propre apporte donc la contribution $\frac{S_o}{2\mu_i}\psi_i^2(M)$ à la puissance totale délivrée par la force. Il est remarquable que cette quantité soit indépendante de la distribution des fréquences propres et amortissements des modes. On a, d'autre part :

$$\mu_i = \int_{\Sigma_o} \bar{\rho}(M)\,\psi_i^2(M)\ dM$$

soit, puisque la structure est localement homogène (cf. annexe) :

II(42) $$\mu_i = M_T \langle \psi_i^2(M) \rangle$$

où l'on a posé :

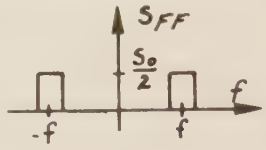
$$M_T = \bar{\rho} A$$

II(41) s'écrit donc

II(43) $$P(M) = \frac{S_0}{2M_T} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2(M)}{\langle \psi_i^2(M) \rangle}$$

Considérons alors une expérience réelle où la force appliquée possède un **spectre de bande idéal,** de largeur B, centré à la fréquence f et d'amplitude S_0. Comme nous avons considéré jusqu'à maintenant les grandeurs spectrales comme définies pour $f > 0$ et $f < 0$ par l'intégrale de Fourier, nous devons définir le spectre de la force sur $(-\infty , +\infty)$ par :

II(44) $$\begin{cases} S_{FF}(f) = \frac{S_0}{2} & \text{pour } f - \frac{B}{2} \leq f \leq f + \frac{B}{2} \\ & \text{et } -f - \frac{B}{2} \leq f \leq -f + \frac{B}{2} \\ = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$



Alors, si B est suffisamment grand devant la largeur $2\alpha_i f_i$ de chaque mode contenu dans la bande (on suppose encore les amortissements petits), on peut récrire II(44) sous la forme :

II(45) $$P_f(M) = \frac{S_0}{2} \frac{1}{2M_T} \sum_{i \in \mathcal{E}_{f,B}} \frac{\psi_i^2(M)}{\langle \psi_i^2(M) \rangle}$$

où $\mathcal{E}_{f,B}$ désigne l'ensemble des indices i des modes dont la fréquence centrale est contenue dans la fenêtre spectrale de la force.

En **moyenne spatiale,** c'est-à-dire en moyenne de l'ensemble des épreuves consistant à déplacer le point d'application de la force sur Σ_0 et à mesurer la puissance fournie pour chaque épreuve, on a :

$$\langle P_f(M) \rangle = \frac{S_0}{4M_T} \sum_{i \in \mathcal{E}_{f,B}} 1$$

et la somme des indices $i \in \mathcal{E}_{f,B}$ est le nombre de modes contenus dans la bande, soit $\bar{n}(f)\, B$. Donc,

II(46) $$\langle P_f(M) \rangle = S_0 B \cdot \frac{\bar{n}(f)}{4M_T}$$

La densité spectrale de la puissance fournie en moyenne spatiale et fréquencielle par une force de spectre blanc unité ($S_0 = 1\ N^2/Hz$) définit l'admittance d'entrée **moyenne** de la structure finie, c'est-à-dire

$$\langle \widetilde{G}_{V\,fini}(M, f) \rangle = \frac{1}{S_0 B} \langle P_f(M) \rangle$$

et, d'après II(46) :

II(47) $$\boxed{\langle \widetilde{G}_{V\,fini}(M, f) \rangle = \frac{\bar{n}(f)}{4M_T}}$$

En comparant ce résultat avec II(36), on voit que, si $M_T = M_{oT}$, c'est-à-dire si la masse M_T de la structure réelle est égale à la masse M_{oT} de la structure homogène de référence, on a :

II(48) $$\boxed{G_{V\infty}(f) = \langle \widetilde{G}_{V\,fini}(M, f) \rangle}$$

Dans cette hypothèse, souvent vérifiée (vraie en particulier pour les plaques et membranes), on peut donc énoncer :

L'admittance d'entrée moyenne d'une structure finie est égale à l'admittance d'entrée calculée sur le même milieu, supposé indéfini. Leur valeur commune est égale au quart du rapport de la densité modale à la masse totale de la structure.

On remarquera que le raisonnement qui a conduit à II(47) vaut également pour un milieu **tridimensionnel** (en remplaçant les moyennes de surface par des moyennes en volume). On peut donc considérer le résultat

$$\langle G_{V_{fini}}(M,f) \rangle = \frac{\bar{n}(f)}{4M_T}$$

comme absolument **général** pour les milieux **homogènes**, ou **localement homogènes,** ce qui, à notre connaissance, n'avait **jamais été signalé.** Enfin, on montre aisément qu'en donnant au symbole $\langle\ \rangle$ le sens d'une moyenne **pondérée par la distribution de masse,** II(47) est valable pour **un milieu non homogène quelconque.**

REMARQUE IMPORTANTE

L'expression II(47) fournit un **moyen de mesure direct de la densité modale d'une structure,** *si celle-ci est peu accessible au calcul. Il suffit en effet de mesurer le spectre croisé entre la force appliquée et la réponse au même point, par bandes de fréquence, puis, faisant varier la position du point d'excitation, d'en prendre la moyenne spatiale. Nous montrerons ultérieurement que, si la densité de modes est élevé, cette dernière opération n'est d'ailleurs pas absolument nécessaire et que l'on obtient une très bonne approximation du résultat à l'aide d'une seule mesure.*

5,2. Fonctions de Green généralisée et fonction de transfert globales

5,2.1. Relations moyennes entre ces deux grandeurs

Nous avons montré dans le chapitre I que le spectre croisé de réponse d'une structure soumise à une excitation aléatoire répartie, caractérisée par le spectre croisé de pression $S_p(M_1, M_2, f)$ s'exprime par

II(49) $$\phi_v(M,M',f) = \ll \varphi_{MM'}\ S_p \gg$$

avec

II(50) $$\varphi_{MM'}(M_1,M_2,f) = H^*_{V_{fini}}(M,M_1,f)\, H_{V_{fini}}(M',M_2,f)$$

Nous nous proposons de montrer maintenant qu'il existe une relation simple entre la valeur moyenne (spatiale et fréquencielle) de la fonction de Green généralisée et la valeur moyenne (fréquencielle) de la fonction de transfert.

Considérons pour cela une distribution de pression homogène, non corrélée spatialement et de spectre étroit idéal, c'est-à-dire définie par :

II(51) $$S_p(M_1,M_2,f) = A\, S_{p_1}(f)\, \delta(M_1 - M_2)$$

II(49) devient

$$\phi_{v_1}(M,M',f) = A^2 S_{p_1} \langle \varphi_{MM'}(M_0,M_0,f) \rangle_{M_0}$$

ou, en utilisant II(50) et en tenant compte de la symétrie des fonctions de transfert :

II(52) $$\phi_{v_1}(M,M',f) = A^2 S_{p_1} \langle \varphi_{M_0M_0}(M,M',f) \rangle_{M_0}$$

et on reconnait au second membre la **moyenne spatiale de la fonction de Green généralisée.** II(52) montre que cette moyenne permet de calculer le spectre croisé de réponse de la structure, dans les conditions particulières de l'expérience. En explicitant cette quantité dans la base modale, on trouve aisément :

$$\text{II(53)} \quad \langle \hat{\varphi}_{M_0M_0}(M,M',f) \rangle_{M_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \langle \psi_i^2(M_0) \rangle \left| A_i(f) \right|^2 \psi_i(M)\, \psi_i(M')$$

Dans une bande de fréquences de largeur B, la valeur moyenne de cette expression s'écrit, par un calcul analogue à ce que nous avons déjà effectué :

$$\text{II(54)} \quad \langle \tilde{\varphi}_{M_0M_0}(M,M',f) \rangle_{M_0} = \sum_{i \in \mathcal{E}_{f,B}} \frac{\langle \psi_i^2(M_0) \rangle}{B \beta_i} \frac{1}{2\mu_i} \psi_i(M)\, \psi_i(M')$$

avec $\beta_i = 2\mu_i \alpha_i \omega_i$ et où l'on a utilisé I(38), soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| A_i(f) \right|^2 df = \frac{1}{2\mu_i \beta_i}$$

De la même manière, la fonction de transfert moyenne (en fréquence) entre les points M et M', s'écrit :

$$\text{II(55)} \quad \tilde{H}_{V_{fini}}(M,M',f) = \sum_{i \in \mathcal{E}_{f,B}} \frac{1}{B} \frac{1}{2\mu_i} \psi_i(M)\, \psi_i(M')$$

Nous ferons ici l'hypothèse que le coefficient $\frac{\langle \psi_i^2(M_0) \rangle}{\beta_i}$ varie peu pour les indices $i \in \mathcal{E}_{f,B}$ (il peut, par contre, être variable d'une bande à l'autre, c'est-à-dire être une fonction de la fréquence centrale f). Dans le cas où la structure serait **localement homogène,** ce que nous n'avons pas supposé jusqu'à maintenant, on aurait $\frac{\langle \psi_i^2(M_0) \rangle}{\beta_i} = \frac{1}{M_T} \cdot \frac{1}{2\alpha_i \omega_i}$, quantité constante si la largeur des pics $2\alpha_i \omega_i$ peut être considéré comme identique pour chaque mode : c'est donc une hypothèse raisonnable*. Alors, en comparant II(54) et II(55), on peut écrire

$$\text{II(56)} \quad \boxed{\langle \tilde{\varphi}_{M_0M_0}(M,M',f) \rangle_{M_0} \simeq K(f)\, \tilde{H}_{V_{fini}}(M,M',f)}$$

En moyenne spatiale et fréquencielle, la fonction de Green généralisée est donc proportionnelle à la moyenne fréquencielle de la fonction de transfert de la structure finie sous l'hypothèse que, dans la bande de fréquences considéré, on puisse écrire :

$$\text{II(57)} \quad \frac{\langle \psi_i^2(M_0) \rangle}{\beta_i} = K(f) \qquad \forall i \in \mathcal{E}_{f,B}$$

Alors, en faisant $M = M'$ dans II(56), la quantité $\tilde{H}_{V_{fini}}(M,M,f)$ qui figure au second membre est l'admittance d'entrée moyenne que nous noterons $G_{V_{fini}}(M,f)$.

Au premier membre l'expression $\langle \varphi_{M_0M_0}(M,M,f) \rangle_{M_0}$ peut s'interpréter de trois manières :

a) d'après sa définition même, c'est le spectre de puissance moyen, obtenu au point M , au cours d'une série d'épreuves où la force appliquée, de spectre blanc unité, parcourt successivement tous les points M_0 de Σ_0 .

---

* *On montrerait aisément, grâce à I(39), que cette hypothèse exprime alors simplement* ***l'équirépartition de l'énergie entre les modes de la bande.***

b) d'après l'expression II(52) : c'est alors le spectre de puissance de la réponse au point M à une excitation homogène non corrélée spatialement, et dont la **charge totale** $A^2\ S_{P_1}(f)$ serait égale à l'unité. (On remplace la moyenne sur un ensemble d'épreuves par une épreuve unique).

c) en remarquant que $\varphi_{M_0M_0}(M,M,f) = \varphi_{MM}(M_0,M_0,f)$ en raison des propriétés de symétrie des fonctions de transfert, le premier membre peut s'écrire $\langle \varphi_{MM}(M_0,M_0,f) \rangle_{M_0}$ et exprime maintenant la **moyenne spatiale du spectre de puissance** de la réponse à une force appliquée en M , de spectre unité. Si la structure est homogène, le premier membre est donc proportionnel à son énergie cinétique. On a donc :

II(58) $$\boxed{\langle \tilde{\varphi}_{M_0M_0}(M,M,f) \rangle_{M_0} = \langle \tilde{\varphi}_{MM}(M_0,M_0,f) \rangle_{M_0} = K(f)\,\tilde{G}_{v\,fini}(M,f)}$$

Remarquons enfin que, si l'on prend encore une fois une moyenne spatiale des deux membres de II(58), c'est-à-dire, d'après l'interprétation b) ci-dessus, si on calcule le spectre de puissance moyen de réponse à une distribution de pression non corrélée, on obtient :

II(59) $$\langle \tilde{\varphi}_{M_0M_0}(M,M,f) \rangle_{M_0,M} = K(f) \langle \tilde{G}_{v\,fini}(M,f) \rangle$$

soit, compte tenu de II(47), ce qui suppose l'homogénéité locale :

II(60) $$\boxed{\langle \tilde{\varphi}_{M_0M_0}(M,M,f) \rangle_{M_0,M} = K(f)\,\frac{\bar{n}(f)}{4M_T}}$$

et, en particulier, pour une structure localement homogène, l'énergie cinétique totale due au champ de pression non corrélé serait, pour une bande de largeur B

$$T = M_T \langle \tilde{\varphi}_{M_0M_0}(M,M,f) \rangle_{M_0,M} \qquad B = \frac{\langle \psi_i^2 \rangle}{2\alpha\omega M_T \langle \psi_i^2 \rangle}\ \frac{\bar{n}(f)B}{2}\ S_{FF}$$

$$\text{ou} \qquad T = \frac{\bar{n}(f)\,B}{4M_T\alpha\omega}\ S_{FF}$$

où S_{FF} est le spectre de puissance de la force totale $f > 0$. Pour un système à un degré de liberté, de masse M_T , attaqué par une force de même spectre, on aurait seulement :

$$T_1 = \frac{S_{FF}}{4M_T\alpha_1\omega_1}$$

Par conséquent, tout se passe comme si $\bar{n}(f)B$ systèmes à un degré de liberté identiques contribuaient à l'énergie cinétique totale.

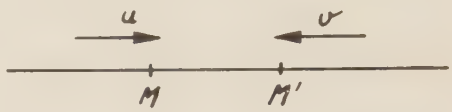
L'ensemble des résultats II(56), II(58), II(59), qui s'appuient sur la seule hypothèse II(57) sont **valables en milieu quelconque, à une, deux ou trois dimensions, homogène ou inhomogène.**

5,2.2. Interprétation - Structure réverbérante

Nous venons d'établir des relations entre valeurs moyennes de la fonction de Green généralisée (qui exprime une densité spectrale croisée de réponse) et de la fonction de transfert. On observe que l'intervention de moyennes fréquentielles a éliminé les parties imaginaires de ces quantités, et que nos relations portent donc sur des moyennes de fonctions **réelles**. Il est alors légitime de s'interroger sur le sens physique de

fonction de transfert ou de spectre croisé purement réels, tels qu'ils apparaissent dans l'expression II(56) par exemple. Ceci va nous conduire à une conception analogue à ce que nous avons dit, au début de ce chapitre, à propos des enceintes acoustiques.

5,2.2.1. Modèles de propagation



Considérons d'abord pour cela une propagation unidirectionnelle suivant MM' de deux grandeurs u et v cheminant en sens opposés, u et v sont supposés aléatoires stationnaires d'ordre deux indépendantes et de même spectre en tout point. Soit C la vitesse commune de propagation.

Au point M, à l'instant t, on a :

$$y(M,t) = u(M,t) + v(M,t)$$

et, au point M' , à l'instant t :

$$y(M',t) = u(M',t) + v(M',t)$$

La fonction d'intercorrélation de y aux points M et M' s'écrit

$$E\left[y(M,t)\, y(M',t+\tau)\right] = \Gamma_{yy}(M,M',\tau)$$

et on a, en vertu de l'indépendance de u et v :

II(60) $$\Gamma_{yy}(M,M',\tau) = \Gamma_{uu}(M,M',\tau) + \Gamma_{vv}(M,M',\tau)$$

Mais, compte tenu des propagations de vitesse C , on a

$$u(M',t) = u(M,t-\xi/c)$$
$$v(M',t) = v(M,t+\xi/c) \qquad \text{avec} \quad |\overrightarrow{MM'}| = \xi$$

ce qui entraine

$$\Gamma_{uu}(M,M',\tau) = \Gamma_{uu}(M,M,\tau-\tfrac{\xi}{c})$$
$$\Gamma_{vv}(M,M',\tau) = \Gamma_{vv}(M,M,\tau-\tfrac{\xi}{c})$$

qui fait apparaître maintenant les fonctions d'autocorrélation de u et v . Comme nous avons supposé que u et v avaient même spectre, il en résulte que $\Gamma_{uu}(M,M,\tau) = \Gamma_{vv}(M,M,\tau) = R(\tau)$ indépendant de point M . II(60) s'écrit donc :

$$\Gamma_{yy}(M,M',\tau) = R\left(\tau-\tfrac{\xi}{c}\right) + R\left(\tau+\tfrac{\xi}{c}\right)$$

Alors, comme $R(\tau)$ est une fonction paire, on vérifie que $\Gamma_{yy}(M,M',\tau) = \Gamma_{yy}(M,M',-\tau)$ ce qui veut dire que la fonction d'intercorrélation de y est paire, donc, par transformation de Fourier, que son spectre croisé est **réel.**

Nous ferons alors deux remarques complémentaires :

a) On aurait pu traiter de la même manière le cas d'une propagation des grandeurs u et v dans une direction du plan, ou de l'espace, quelconque par rapport à M et M' . La vitesse C aurait alors été la vitesse **apparente** de la propagation suivant la direction MM'.

b) Les variables u et v peuvent être interprétées comme l'effet de sources ponctuelles, situées à grande distance, émettant des vibrations statistiquement indépendantes.

La superposition des effets d'une telle distribution de sources fournira, à grande distance, un spectre croisé réel ne dépendant que de la position des points M et M' et de la fréquence.

C'est bien ce que l'on obtient au premier membre de II(56). Mais nous ne savons pas encore s'il est possible de représenter l'état vibratoire de la structure par un modèle de propagation analogue à celui que nous venons de proposer.

5,2.2.2. Calcul approché de la fonction de transfert

Tout ce que nous pouvons déduire du fait que $\langle \tilde{\varphi}_{M_0 M_0}(M, M', f) \rangle_{M_0}$ est une quantité réelle, c'est que cette fonction est également symétrique par rapport à M et à M', ce qui pouvait déjà être constaté à partir de II(54) par exemple. Nous allons montrer maintenant que, dans le cadre de nos hypothèses, on peut donner une expression approchée du second membre de II(56) comme fonction de la seule distance $|\vec{M} - \vec{M'}|$ des deux points où l'on mesure le spectre croisé.

Prenons pour cela l'exemple bidimensionnel de fonctions propres sinusoïdales suivant les variables x et y de la forme

II(61) $$\psi_{\ell n}(M) = \sin k_{x\ell}\, x \,.\, \sin k_{yn}\, y$$

où l'indice i figurant dans les expressions telles que II(55) est maintenant remplacé par le couple (ℓ, n) On sait que de telles fonctions propres sont associées aux modes naturels de vibration de membranes ou plaques homogènes rectangulaires (avec simple appui au bord), par exemple. Nous admettons également, dans ce cas, que la structure est homogène, ce qui permet d'écrire II(55) sous la forme :

II(62) $$\tilde{H}_{v\,fini}(M, M', f) = \frac{1}{2B} \sum_{(\ell,n,)\in \mathcal{E}_{f,B}} \frac{\psi_{\ell n}(M)\, \psi_{\ell n}(M')}{M_T \langle \psi^2_{\ell n}(M) \rangle}$$

où l'on a utilisé l'expression II(42) pour la masse généralisée.

Posant alors $\overrightarrow{MM'} = \begin{Bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \end{Bmatrix}$, il vient :

II(63) $$H_{v\,fini}(M, M', f) = \frac{1}{2BM_T} \sum_{\ell,n,\in \mathcal{E}_{f,B}} [\cos k_{x\ell}\, \xi_x - \cos k_{x\ell}(2x + \xi_x)][\cos k_{yn}\, \xi_y - \cos k_{yn}(2y + \xi_y)]$$

où l'on a tenu compte du fait que, dans notre exemple bidimensionnel :

$\langle \psi^2_{\ell,n}(M) \rangle = 1/4$ (la masse généralisée est normalisée à 1 au ventre de $\psi_{\ell,n}$).

Le calcul **approché** que nous allons faire maintenant consiste à négliger, dans II(63), la contribution des termes en $\cos k_{x\ell}(2x + \xi_x)$ et en $\cos k_{yn}(2_y + \xi_y)$ à la somme totale. Remarquons qu'en moyenne spatiale chacun de ces termes disparaîtrait. Ici, nous devons sommer, pour un certain nombre d'indices ℓ, tels que $\alpha_n \leq \ell < \beta_n$ (n fixé) des termes de la forme $A_n(y, \xi_y) \cos k_{x\ell}(2x + \xi)$. Alors, sauf pour $(2x + \xi) = 0$, l'argument du cosinus est grand pour toutes les valeurs de ℓ à considérer puisque $k_{x\ell}$ est grand par hypothèse. Nous admettrons que, pour tout n, la suite des valeurs permises pour ℓ répartit l'argument $k_{x\ell}(2x + \xi)$ sur $(0, 2\pi)$ d'une manière sensiblement uniforme. On peut alors écrire l'expression approchée de $\tilde{H}_{v\,fini}(M, M', f)$ sous la forme :

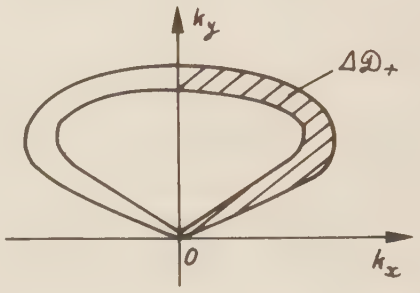
II(64) $$H_{v\,fini}(M, M', f) \simeq \frac{1}{2BM_T} \sum_{\ell,n,\in \mathcal{E}_{f,B}} \cos k_{x\ell}\, \xi_x \cos k_{yn}\, \xi_y$$

où le second membre donne, pour $\overrightarrow{MM'}$ fixé, l'expression **exacte de la moyenne spatiale** de la fonction de transfert $\tilde{H}_{Vfini}(M,M',f)$. L'hypothèse simplificatrice introduite ci-dessus revient donc à substituer à la fonction de transfert entre deux points fixes M et M' de Σ_o, la valeur moyenne de cette fonction de transfert quand le vecteur $\overrightarrow{MM'}$, constant en module et en direction, se déplace sur Σ_o. Ce que nous venons de voir montre que cette substitution est d'autant plus légitime que, dans la bande de fréquences considérée, le nombre des indices $l, n, \in \mathcal{G}_{f,B}$ sera élevé (hypothèse de la répartition uniforme de l'argument $\varphi_{xl}(2\alpha - \xi)$. En d'autres termes, **plus la densité modale sera élevée, et plus l'approximation II(64) sera satisfaisante.** Nous montrerons, au chapitre IV, que l'expérience confirme bien cette hypothèse.

On peut maintenant récrire II(64) d'une autre manière en remplaçant à nouveau la somme discrète par une intégrale où intervient la densité modale. Il vient :

$$\tilde{H}_{Vfini}(M,M',f) \simeq \frac{1}{4BM_T} \iint_{\Delta\mathcal{D}_+} \left\{ \cos(k_x\xi_x + k_y\xi_y) + \cos(-k_x\xi_x + k_y\xi_y) \right\} \times \frac{dk_x}{\frac{\pi}{L_x}} \frac{dk_y}{\frac{\pi}{L_y}}$$

où $\Delta\mathcal{D}_+$ représente le domaine de l'espace des nombres d'ondes **positifs** limité par les courbes $C\left(f - \frac{B}{2}\right)$ et $C\left(f + \frac{B}{2}\right)$. On remarque que l'expression ci-dessus peut être simplifiée en intégrant sur tout le domaine $\Delta\mathcal{D}$ du demi-plan supérieur limité par les courbes C et leur symétrique par rapport à l'axe Ok_y. Soit :



$$\tilde{H}_{Vfini}(M,M',f) \simeq \frac{1}{4BM_T} \frac{L_x L_y}{\pi^2} \iint_{\Delta\mathcal{D}} \cos(\vec{k}.\overrightarrow{MM'})\, dk_x\, dk_y$$

En passant en coordonnées polaires, puis en utilisant le changement de variables II(30), ceci donne, en se souvenant que $A_o = L_x L_y$

$$\tilde{H}_{Vfini}(M,M',f) \simeq \frac{1}{4M_T} \frac{A_o}{\pi^2} \frac{1}{B} \int_0^{\pi} d\varphi \int_{f-\frac{B}{2}}^{f+\frac{B}{2}} \cos\left[\bar{k}(\varphi,f)(\xi_x\cos\varphi + \xi_y\sin\varphi)\right] \bar{k} \left|\frac{\partial k}{\partial\omega}\right| d(2\pi f)$$

Alors, pour une bande étroite de largeur B, centrée en f :

$$\text{II(65)} \quad \boxed{\tilde{H}_{Vfini}(M,M',f) \simeq \frac{1}{8M_T} \int_0^{\pi} \bar{n}'(\varphi,f) \cos\left[\bar{k}(\varphi,f)(\xi_x\cos\varphi + \xi_y\sin\varphi)\right] d\varphi}$$

où l'on a utilisé le théorème de la moyenne et l'expression II(20) pour la définition de $\bar{n}'(\varphi,f)$. II(65) a en outre été multiplié par 1/2 pour obtenir une expression de la moyenne fréquentielle valable pour $f < 0$, comme nous l'avons fait au paragraphe 5,1 (cf. II(44)).

On obtient ainsi une expression approchée de la fonction de transfert moyenne de la structure finie, ne dépendant que du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ (non de son point d'application) et de la distribution angulaire de la densité modale.

En comparant avec II(37) on constate que **la fonction de transfert moyenne de la structure finie est proportionnelle à la partie réelle de la fonction de transfert de la structure infinie également homogène.**

En particulier, si la masse totale M_T de la structure finie égale la masse M_{oT} de la structure de référence, d'aire A_o, il vient :

II(66) $$H_{V_{fini}}(M,M',f) \simeq 2R_e\left\{H_{V_\infty}(\vec{MM'},f)\right\}$$

5,2.2.3. Structure réverbérante

Nous pouvons maintenant écrire II(56) sous la forme :

II(67) $$\langle \tilde{\varphi}_{M_oM_o}(M,M',f)\rangle_{M_o} \simeq \frac{1}{8M_T} K(f)\int_o^{\pi} \bar{n}'(\varphi,f)\cos\left[\bar{k}(\varphi,f)(\xi_x\cos\varphi+\xi_y\sin\varphi)\right]d\varphi$$

et revenir au modèle physique de propagation que nous avons imaginé au début de ce paragraphe.

En effet, considérons le champ vibratoire créé au sein de Σ_o (toujours dans le cas bidimensionnel) par une infinité de sources réparties, à l'infini, sur un cercle. Chacune de ces sources émet des vibrations incohérentes et de même spectre de puissance. D'après ce que nous avons dit précédemment, le champ vibratoire créé est directif, et la probabilité d'incidence d'une onde de fréquence f dans la direction définie par l'angle φ, compris entre 0 et π, est donnée par la densité $p(\varphi,f)$ avec :

$$p(\varphi,f) = \frac{\bar{n}'(\varphi,f)}{2\bar{n}(f)}$$

soit $$\int_o^{\pi} p(\varphi,f)\,d\varphi = 1$$

Soit $\phi_o(f)$ le spectre de puissance de la vibration recueillie en tout point M de Σ_o. Un paquet d'ondes de fréquence f cheminant dans les directions comprises entre φ et $\varphi+d\varphi$ donnera la contribution $\phi_o(f)\,p(\varphi,f)\,d\varphi$ à la puissance totale. D'autre part, le spectre croisé élémentaire est une quantité réelle qui vaut :

$$d\phi_o(M,M',f) = \phi_o(f)\,p(\varphi,f)\cos\left[\bar{k}(\varphi,f)\,\vec{MM'}\right]d\varphi$$

et, en sommant pour toutes les directions φ

II(68) $$\phi_o(M,M',f) = \frac{\phi_o(f)}{2\bar{n}(f)}\int_o^{\pi} \bar{n}'(\varphi,f)\cos\left[\vec{k}(\varphi,f)\vec{MM'}\right]d\varphi$$

Le coefficient de corrélation spatiale instantanée, à la fréquence f est alors :

$$\eta_o(M,M',f) = \frac{\phi_o(M,M',f)}{\phi_o(f)}$$

soit

II(69) $$\eta_o(M,M',f) = \frac{1}{2\bar{n}(f)}\int_o^{\pi} \bar{n}'(\varphi,f)\cos\left[\vec{k}(\varphi,f)\vec{MM'}\right]d\varphi$$

Alors, en comparant II(67) et II(69), il vient :

II(70) $$\boxed{\langle \tilde{\varphi}_{M_oM_o}(M,M',f)\rangle_{M_o} \simeq \frac{\bar{n}(f)}{4M_T}\,K(f)\,\eta_o(M,M',f)}$$

En moyenne spatiale et fréquentielle, la fonction de Green généralisée de la structure finie est donc proportionnelle au coefficient de corrélation instantanée, à la fréquence f , du champ vibratoire produit par une infinité de sources indépendantes situées à l'infini. Par analogie avec le cas rencontré précédemment en acoustique, nous dirons que **la structure est le siège d'un champ vibratoire de type réverbérant.** Par concision, on dira également que, dans le cadre des hypothèses de cette approche globale, la structure est **réverbérante.**

Ce concept a déjà été introduit par plusieurs auteurs [6, 7, 33] pour caractériser le champ vibratoire «haute fréquence» de structures telles que des plaques. Toutefois, son emploi résultait davantage d'une commodité de langage, par analogie avec l'acoustique, que d'une analyse concrète de la situation réelle du problème structural. En particulier, le caractère directif de la propagation était jusqu'ici ignoré, ainsi que ses conséquences quant au calcul de la fonction de Green généralisée puisqu'il s'agit d'une contribution originale de ce travail. Ce dernier point a une importance capitale puisqu'il permet pour la première fois, grâce à II(70), de calculer explicitement la valeur moyenne de la fonction de Green généralisée (sous des hypothèses simplificatrices raisonnables) à partir de la connaissance des seules équations du mouvement du milieu dissipatif, supposé **localement homogène.** Rappelons ici les principaux résultats :

En milieu quelconque, **homogène ou non, mono, bi ou tridimensionnel :**

➧ **Hypothèse :** $\dfrac{\langle \psi_i^2(M_o)\rangle}{\beta_i} = K(f)$ indépendant de $i \in \mathcal{E}_{f,B}$

alors :

II(56) $$\langle \widetilde{\varphi}_{M_oM_o}(M,M',f)\rangle_{M_o} \simeq K(f)\,\widetilde{H}_{V\,fini}(M,M',f)$$

soit, pour $M = M'$

II(58) $$\langle \widetilde{\varphi}_{M_oM_o}(M,M,f)\rangle_{M_o} = \langle \varphi_{MM}(M_o,M_o,f)\rangle \simeq K(f)\,\widetilde{G}_{V\,fini}(M,f)$$

➧ En milieu **homogène localement :**

II(47) $$\langle \widetilde{G}_{V\,fini}(M,f)\rangle = \frac{\bar{n}(f)}{4M_T}$$

d'après II(65) $$\widetilde{G}_{V\,fini}(M,f) \simeq \langle \widehat{G}_{V\,fini}(M,f)\rangle$$

alors, si $M_T = M_{oT}$

II(48) $$\langle \widetilde{G}_{V\,fini}(M,f)\rangle = G_{V\infty}(f)$$

II(66) $$\widetilde{H}_{V\,fini}(M,M',f) \simeq 2\,R_e\{H_{V\infty}(\overrightarrow{MM'},f)\}$$

On en déduit, si

Hypothèse : $\dfrac{\langle \psi_i^2(M_o)\rangle}{\beta_i} = K(f)$ indépendant de $i \in \mathcal{E}_{f,B}$

II(70) $$\langle \tilde{\varphi}_{M_0M_0}(M,M',f) \rangle \simeq \frac{\bar{n}(f)}{4M_T} K(f)\, \eta_0(M,M',f)$$

et, pour $M = M'$

$$\langle \tilde{\varphi}_{M_0M_0}(M,M,f) \rangle \simeq \frac{\bar{n}(f)}{4M_T} K(f)$$

6. CARACTÉRISTIQUES DYNAMIQUES GLOBALES DE LA STRUCTURE FINIE

6,1. Hypothèse fondamentale

Les résultats qui précèdent permettent de définir une idéalisation des caractéristiques dynamiques globales d'une structure finie, c'est-à-dire un modèle mathématique valable dans la gamme des nombres d'ondes élevés où les modes propres sont suffisamment voisins en fréquence pour que la notion de moyenne fréquencielle ait un sens.

Dans le cadre de cette analyse globale (par bandes de fréquence), nous avons mis en évidence le lien qui unit la moyenne spatiale de la fonction de Green généralisée à la fonction de transfert, d'une part, et la moyenne spatiale du spectre direct $\tilde{\varphi}_{M_0M_0}(M,M,f)$ à l'admittance d'entrée de la structure finie, d'autre part. Ces moyennes spatiales peuvent être considérées comme des **moyennes stochastiques**, c'est-à-dire portant sur un ensemble d'épreuves consistant par exemple à mesurer un spectre croisé de réponse en deux points fixes pour toutes les positions possibles du point d'application de la force excitatrice.

Notre **hypothèse** consiste à dire que **ces propriétés sont vraies,** non plus en moyenne spatiale, mais **en chaque point de la structure finie dès lors que le nombre de modes mis en jeu dans la bande de fréquences de largeur B est suffisamment élevé.**

Il s'agit donc d'une hypothèse d'ergodicité qui permet de remplacer une moyenne d'ensemble par une estimation sur une seule épreuve. On admet que cette estimation sera satisfaisante si, dans la bande de fréquences, la répartition statistique des minima et des maxima d'amplitude de chaque mode est indépendante du point de mesure.

Dans le paragraphe précédent, nous avons été amenés à mettre en œuvre cette hypothèse -sous une forme légèrement différente- pour introduire la notion de « structure réverbérante ». Nous avons en effet admis, dans le calcul de la fonction de transfert moyenne de la structure finie, qu'il est légitime, si la densité modale est suffisamment élevée, d'ignorer le champ vibratoire **direct** produit par la source de vibration (force excitatrice), pour ne prendre en considération que le champ réverbéré, c'est-à-dire ayant subi n réflexions sur les frontières. Alors, si on ne se place pas au voisinage immédiat des bords, la fonction de transfert moyenne ne fait intervenir que des interférences d'ondes planes produites par une infinité de sources indépendantes très éloignées des points d'observation.

Nous montrerons, au chapitre V que l'expérience confirme cette hypothèse. Nous allons en tenir compte dès maintenant pour expliciter les relations qui décrivent les caractéristiques dynamiques globales d'une structure.

6,2. Explicitation du modèle mathématique

6,2.1. Expression dans le domaine fréquenciel

1°) L'admittance d'entrée moyenne d'une structure finie localement homogène vaut, d'après II(47) et II(48) :

II(71) $$\tilde{G}_{V\,fini}(M,f) = G_{V\infty}(f) = \frac{\bar{n}(f)}{4M_T}$$

Cette quantité peut s'interpréter comme la densité spectrale de la puissance fournie à la structure par une force aléatoire appliquée en un point quelconque, et de spectre blanc unité (1 N^2/Hz).

2°) La fonction de Green généralisée entre deux points M et M' a pour expression, d'après II(70) :

II(72) $$\tilde{\varphi}(M,M',f) = \frac{\bar{n}(f)}{4M_T} \cdot K(f)\ \eta_0(M,M',f)$$

avec

II(69) $$\eta_0(M,M',f) = \int_0^{\pi} \frac{\bar{n}(\varphi,f)}{2\bar{n}(f)} \cos\left[\vec{k}(\varphi,f)\ \overrightarrow{MM'}\right] d\varphi$$

Pour $M = M'$, on a $\eta_0(M,M',f) = 1$ et

II(73) $$\tilde{\varphi}(M,M,f) = \frac{\bar{n}(f)}{4M_T}\ K(f)$$

II(74) avec $$K(f) = \frac{1}{M_T} \cdot \frac{1}{2\alpha\omega}$$

α désignant le taux de viscosité moyen des modes de fréquence voisine de f.

Autrement dit, la fonction de Green généralisée est proportionnelle au coefficient de corrélation spatiale instantané de la réponse, à la fréquence f, d'une structure réverbérante. Si on pose

II(75) $$\tilde{\eta}(M,M',f) = \frac{\tilde{\varphi}(M,M',f)}{\left[\tilde{\varphi}(M,M,f)\ \tilde{\varphi}(M',M',f)\right]^{1/2}}$$

il vient, d'après II(72) et II(73)

II(76) $$\tilde{\eta}(M,M',f) = \eta_0(M,M',f)$$

Ceci veut dire que le coefficient de corrélation spatiale instantané, à la fréquence f, de la réponse en deux points M et M' lorsque la structure est **soumise à une force** ponctuelle aléatoire de spectre blanc est identique au coefficient $\eta_0(M,M',f)$ caractérisant la réponse du milieu parfaitement réverbérant. On remarque bien ici le fait que le champ **direct** entre le point source et les points M et M' a été ignoré.

3°) La fonction de transfert moyenne de la structure finie a pour valeur :

II(66) $$\tilde{H}_{V\,fini}(M,M',f) = 2\,R_e\,\{H_{V\infty}(M-M',f)\}$$

Toutes les relations du paragraphe 6,2 sont valables en milieu localement homogène. Les quantités $G_{V_\infty}(f)$ et $H_{V_\infty}(M-M', f)$ qui interviennent dans II(71) et II(66) sont définies à partir de la structure homogène de référence associée à la structure localement homogène (annexe).

Ceci constitue l'expression spectrale du modèle mathématique global des caractéristiques dynamiques de la structure. Il est utile, dans certains cas, de pouvoir utiliser son expression spatio-temporelle c'est-à-dire sa transformée de Fourier fréquence-temps.

6,2.2. Expression spatio-temporelle

Nous appellerons $\tilde{N}(M,M',\tau)$ la transformée de Fourier de la fonction de Green généralisée $\tilde{\varphi}(M,M',f)$ c'est-à-dire la fonction d'inter corrélation de la réponse à une force de spectre blanc unité. On a donc :

$$\tilde{N}(M,M',\tau) = R_e \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(M,M',f) \exp j\, 2\pi f\tau \, df$$

soit, puisque $\tilde{\varphi}$ est réelle :

II(77) $$\tilde{N}(M,M',\tau) = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(M,M',f) \cos 2\pi f\tau \, df$$

ce qui s'écrit, en utilisant II(72) et II(69) :

$$\tilde{N}(M,M',\tau) = \frac{1}{4M_T} \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi} n'(\varphi,f)\, K(f) \cos 2\pi f\tau \cos\left[\vec{k}(\varphi,f)\,\overrightarrow{MM'}\right] df$$

Le produit de cosinus vaut $\frac{1}{2} R_e \left\{\exp j\left(2\pi f\tau + \vec{k}\,\overrightarrow{MM'}\right) + \exp j\left(2\pi f\tau - \vec{k}\,\overrightarrow{MM'}\right)\right\}$

ce qui permet, en intégrant sur φ de 0 à 2π, de se ramener à la forme :

II(78) $$\tilde{N}(M,M',\tau) = \frac{1}{8M_T} R_e \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} \bar{n}'(\varphi,f)\, K(f) \exp j\left[2\pi f\tau - \vec{k}(\varphi,f)\,\overrightarrow{MM'}\right] df$$

Par un changement de variable, on peut transformer cette intégrale en une autre portant sur l'espace des nombres d'ondes. Utilisant II(20) et posant $k_x = k(\varphi,f)\cos\alpha$

$$k_y = k(\varphi,f)\sin\alpha$$

II(79) puis $K_1(k_x,k_y) = K\left[\frac{\bar{\omega}}{2\pi}(k_x,k_y)\right]$ où $\bar{\omega}(k_x,k_y)$ est donné par II(16-a), il vient finalement :

II(80) $$\tilde{N}(M,M',\tau) = \frac{1}{8M_T} \frac{2A_0}{\pi} R_e \iint_{-\infty}^{+\infty} K_1(k_x,k_y) \exp j\left(\bar{\omega}\tau - k_x x - k_y y\right) dk_x\, dk_y$$

où l'on a tenu compte du fait que cette fonction ne dépend que du vecteur $\overrightarrow{MM'}$, de composantes x et y.

Le calcul exact de II(80) n'est pas possible en général, et on doit avoir recours à un calcul approché.

6,2.2.1. Méthode de la phase stationnaire

Supposons par exemple que $K(f)$, donné par II(74), varie peu avec la fréquence, ce qui revient à supposer que, pour tous les modes de la structures, la largeur de bande $2\alpha\omega$ soit approximativement constante. Alors $K_1(k_x, k_y)$ est à variation très lente et on a à sommer dans II(80) des ondes d'amplitudes sensiblement égales. Pour x , y , τ fixés, si l'argument $\Theta(k_x, k_y) = \bar{\omega}\tau - k_x x - k_y y$ varie rapidement avec k_x et k_y une faible variation de ces paramètres fera passer Θ de Θ_0 à $\Theta_0 + \pi$ et donnera donc une onde en opposition de phase avec la première, dont la somme est nulle. La contribution principale proviendra donc des valeurs du domaine (k_x, k_y) où Θ est **stationnaire**, c'est-à-dire

II(81)
$$d\Theta = 0 \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \Theta}{\partial k_x} = 0 \\ \dfrac{\partial \Theta}{\partial k_y} = 0 \end{cases}$$

On intègrera donc II(80) par la méthode de la phase stationnaire en développant Θ au voisinage des points k_{x_0} , k_{y_0} solutions de II(81), c'est-à-dire en posant

II(82)
$$\Theta(k_x, k_y) = \Theta(k_{x_0}, k_{y_0}) + \frac{(k_x - k_{x_0})^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial k_x^2}\right)_{k_{x_0}} + \frac{(k_y - k_{y_0})^2}{2}\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial k_y^2}\right)_{k_{y_0}}$$

le développement étant limité au second ordre.

Alors, après avoir remarqué que :

II(83)
$$\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial k_x^2}\right)_{k_{x_0}} = \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial k_x^2}\right)_{k_{x_0}} \tau = \bar{\omega}''_{k_{x_0}^2}\tau$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial k_y^2}\right)_{k_{y_0}} = \left(\frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial k_y^2}\right)_{k_{y_0}} \tau = \bar{\omega}''_{k_{y_0}^2}\tau$$

il vient, en reportant dans II(80) :

II(84)
$$\tilde{N}(M, M', \tau) = \frac{1}{8M_T}\frac{2A_0}{\pi} Re\left\{K_1(k_{x_0}, k_{y_0}) \exp j\,\Theta(k_{x_0}, k_{y_0})\, I\right\}$$

avec

$$I = \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp j\left[\frac{(k_x - k_{x_0})^2}{2}\bar{\omega}''_{k_{x_0}^2}\tau + \frac{(k_y - k_{y_0})^2}{2}\bar{\omega}''_{k_{y_0}^2}\tau\right] dk_x\, dk_y$$

Utilisons maintenant le résultat :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \pm j\, a^2\alpha^2\, d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \exp \pm j\frac{\pi}{4}$$

et posant :

II(85)
$$\begin{cases} \bar{\omega}''_{k_{x_0}^2}\tau = \varepsilon_x \left|\bar{\omega}''_{k_{x_0}^2}\tau\right| \\ \bar{\omega}''_{k_{y_0}^2}\tau = \varepsilon_y \left|\bar{\omega}''_{k_{y_0}^2}\tau\right| \end{cases}$$

où $\varepsilon = \pm 1$, il vient :

$$I = 2\pi \left[\left| \bar{\omega}''_{k_{x_0}^2} \; \bar{\omega}''_{k_{y_0}^2} \; \tau^2 \right| \right]^{-1/2} \exp j \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y \right) \frac{\pi}{4}$$

et II(84) se met finalement sous la forme :

$$\text{II(85)} \quad \boxed{\tilde{N}\left(M,M',\tau\right) = R_e \left\{ \frac{A_0}{4M_T} \; K_1\left(k_{x_0}, k_{y_0}\right) \left[\left| \bar{\omega}''_{k_{x_0}^2} \; \bar{\omega}''_{k_{y_0}^2} \; \tau^2 \right| \right]^{-1/2} \times \exp j \left[\textcircled{n}\left(k_{x_0}, k_{y_0}\right) + \frac{\pi}{4} \left(\varepsilon_x + \varepsilon_y \right) \right] \right\}}$$

ce qui permet d'expliciter complètement le résultat dans chaque cas particulier. On notera que l'amplitude décroît comme $\frac{1}{|\tau|}$.

6,2.2.2. Exemple - Cas d'un panneau plan en flexion

L'équation du mouvement de la plaque plane en flexion s'écrit :

$$\text{II(86)} \quad \left(\alpha_0^2 \, \nabla^4 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w = 0$$

avec $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ $\qquad \alpha_0^2 = \frac{C_L^2 h^2}{12}$

où h est l'épaisseur et C_L la vitesse des ondes longitudinales.

Il vient immédiatement :

$$\text{II(87)} \quad \bar{\omega} = \alpha_0 k^2 = \alpha_0 \left(k_x^2 + k_y^2 \right)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\text{II(88)} \quad \bar{\omega}''_{k_x^2} = \bar{\omega}''_{k_y^2} = 2\alpha_0 \left(= C^2 \right)$$

La phase sera stationnaire si

$$\begin{cases} \bar{\omega}'_{k_x} \tau - x = 0 \\ \bar{\omega}'_{k_y} \tau - y = 0 \end{cases}$$

soit pour les valeurs de k_{x_0} et k_{y_0} données par :

$$\text{II(83)} \quad \begin{cases} 2\alpha_0 \, k_{x_0} \tau - x = 0 \\ 2\alpha_0 \, k_{y_0} \tau - y = 0 \end{cases}$$

On remarque immédiatement que le développement de la phase $\textcircled{n}$, limité au second ordre, est **exact** puisque les dérivées de $\bar{\omega}$ d'ordre supérieur sont nulles. D'autre part, il vient :

$$\textcircled{n}\left(k_{x_0}, k_{y_0}\right) = \bar{\omega}\tau - k_{x_0} x - k_{y_0} y = \alpha_0 \left(k_{x_0}^2 + k_{y_0}^2 \right) \tau - k_{x_0} x - k_{y_0} y$$

ce qui s'écrit, grâce à II(89) :

$$\text{II(90)} \quad \textcircled{n}\left(k_{x_0}, k_{y_0}\right) = - \frac{x^2 + y^2}{4\alpha_0 \tau}$$

En reportant II(88) et II(90) dans II(85), on obtient :

$$\text{II(91)} \qquad \boxed{\tilde{N}(M,M',\tau) = \frac{A_0}{4M_T} K_1 \cdot \frac{1}{2\alpha_0|\tau|} \sin\left[\frac{x^2+y^2}{4\alpha_0|\tau|}\right] \quad \forall \tau \neq 0}$$

On remarquera que cette quantité ne dépend que de la distance $r = \sqrt{x^2+y^2}$ des points M et M', et qu'elle est proportionnelle à la réponse impulsionnelle vitesse d'une plaque infinie [30], comme on pouvait également le voir en utilisant les relations II(56) et II(66). On a, en effet :

$$\text{II(92)} \qquad \begin{cases} h_{V\infty}(\rho,\tau) = \dfrac{1}{4\pi\rho_0\alpha_0\tau} \sin\left[\dfrac{r^2}{4\alpha_0\tau}\right] & \tau > 0 \\ = 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\text{II(93)} \qquad \begin{cases} \tilde{N}(M,M',\tau) = \dfrac{\pi}{2} K_1 \, h_{V\infty}(\rho,\tau) & \tau > 0 \\ \tilde{N}(M,M',\tau) = \dfrac{\pi}{2} K_1 \, h_{V\infty}(\rho,-\tau) & \tau < 0 \end{cases}$$

La fonction d'intercorrélation de la plaque oscille donc très rapidement au voisinage de $\tau = 0$, plus lentement lorsque τ augmente, avec une enveloppe décroissant comme $\frac{1}{\tau}$. Bien entendu, ce résultat n'est valable que dans l'approximation $K(f) \simeq$ cte $\forall f$. En pratique, on doit tenir compte d'une variation éventuelle de $K(f)$, c'est-à-dire du schéma réel de la dissipation d'énergie dans la structure (en particulier aux liaisons avec les éléments adjacents). Les expressions II(85) et II(91) fournissent alors une référence approchée à laquelle on peut confronter les résultats fournis par l'expérience, ce qui peut faciliter leur interprétation physique.

6,2.2.3. Interprétation de la condition de stationnarité de la phase

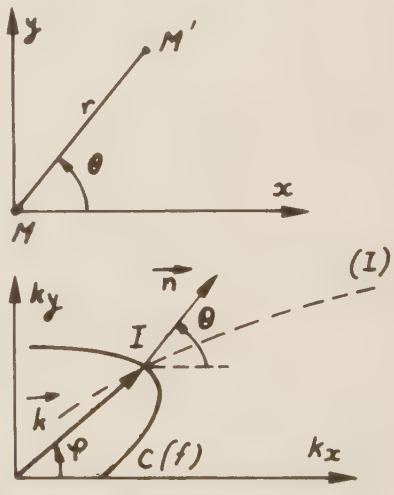
Nous avons vu que les conditions II(81) pour que la phase soit stationnaire sont :

$$\bar{\omega}'_{kx}\tau - x = 0$$

$$\bar{\omega}'_{ky}\tau - y = 0$$

Alors si $|\overrightarrow{MM'}| = r$ et $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{MM'}) = \theta$, on en déduit :

$$\text{II(94)} \qquad \begin{cases} \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg}\theta = \dfrac{\bar{\omega}'_{ky}}{\bar{\omega}'_{kx}} \\ r = \left[\omega'^2_{kx} + \omega'^2_{ky}\right]^{1/2}\tau \end{cases}$$



En passant dans l'espace des vecteurs d'onde, on remarque alors que $\frac{\bar{\omega}'_{ky}}{\bar{\omega}'_{kx}}$ n'est autre que la pente de la normale à la courbe $C(f)$ d'équation $\bar{\omega}^2 = D(k_x, k_y)$. La première relation II(94) indique donc que, quand $\bar{\omega}$ varie, la phase sera stationnaire quel que soit le retard τ sur la courbe (I). Cette courbe est le lieu des points où la normale $\vec{n}$ à $C(f)$ est parallèle à $\overrightarrow{MM'}$. La seconde relation II(94) fournit ensuite, à τ fixé, la position précise du point I dans le plan (k_x, k_y).

6,2.3. Remarque importante

En examinant l'expression II(80), on constate que, pour le retard nul ($\tau = 0$) la fonction d'intercorrélation $\tilde{N}(M, M', 0)$ est proportionnelle à la quantité :

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} K_1(k_x, k_y) \cos\left[k_x x + k_y y\right] dk_x\, dk_y$$

c'est-à-dire à la transformée de Fourier de la fonction K_1 . L'hypothèse K_1 = cte des paragraphes précédents conduit donc à prendre la transformée spatiale d'une constante, ce qui donne

$$\tilde{N}(M, M', 0) = K' \delta(M - M')$$

δ étant la distribution de Dirac. En particulier, pour $M = M'$, le résultat est inadmissible puisque $\tilde{N}(M, M', 0)$ exprime la valeur quadratique moyenne de la réponse d'une structure à une excitation finie, et ne saurait donc être infinie en aucun point de l'espace. L'hypothèse faite sur K_1 n'est pas en cause en elle-même (car c'est une hypothèse dont le sens physique est tout à fait admissible) comme on peut le voir en se reportant maintenant à l'expression du spectre de puissance $\tilde{\varphi}(M, M, f)$, donné par II(73) soit :

II(73) $$\tilde{\varphi}(M, M, f) = \frac{\bar{n}(f)}{4 M_T} K(f)$$

Alors, la fonction d'autocorrélation en tout point M s'écrit

II(95) $$\tilde{N}(M, M, \tau) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\bar{n}(f)}{4 M_T} K(f) \cos 2\pi f \tau \, df$$

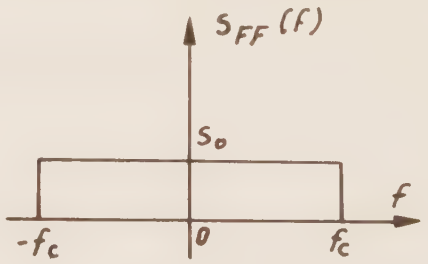
et l'intégrale est en général divergente puisque $\bar{n}(f)$ est une fonction non décroissante de la fréquence, $K(f)$ étant a priori quelconque.

Cette difficulté apparente est la conséquence du fait que nous avons ici traité ces grandeurs physiques comme des fonctions. Ce sont en réalité des **distributions** et il est ici nécessaire de se rappeler que nous avons défini la fonction de Green généralisée comme le spectre croisé de la réponse vitesse à une force aléatoire de **spectre blanc unité.** La fonction d'autocorrélation de cette force est donc de la forme :

$$E\left[F(t)\, F(t+\tau)\right] = F_o^2\, \delta(\tau)$$

et la normalisation du spectre à 1 sur tout l'axe des fréquences impose $F_o = 1$. On se trouve donc en présence d'un cas identique à celui que nous venons d'évoquer, car la puissance totale de la force est infinie. Pour lever cette difficulté apparente, on substitue à la fiction de spectre blanc la notion de spectre à large bande, nul au delà d'une fréquence limite F_c . La puissance totale du signal possédant un tel spectre de puissance est alors finie et vaut :

$$\sigma_F^2 = \int_{-F_c}^{+F_c} S_o \, df = 2 F_c S_o$$



Dans le cas présent, nous devons évidemment rappeler que des quantités telles que II(95) sont associées à une excitation de puissance totale finie, en tronquant également l'intégration sur l'axe des fréquences. On notera que cette troncature est en outre justifiée par le domaine de validité des schématisations mathématiques des phénomènes physiques (cf. annexe). Il vient, par conséquent :

II(95bis) $$\tilde{N}_{f_c}(M, M, \tau) = 2 \int_0^{f_c} \frac{\bar{n}(f)}{4 M_T} K(f) \cos 2\pi f \tau \, df$$

Si $K(f)$ = cte, il vient en particulier

$$\tilde{N}_{f_c}(M,M,0) = \frac{N(f_c)}{2M_T} K$$

et, en général

$$\tilde{N}_{f_c}(M,M,0) = 2\int_0^{f_c} \frac{\bar{n}(f)}{4M_T} K(f)\, df$$

Alors, **le coefficient de corrélation**, défini par

II(96) $$\tilde{\gamma}_{f_c}(0,\tau) = \frac{\tilde{N}_{f_c}(M,M,\tau)}{\tilde{N}_{f_c}(M,M,0)}$$

est toujours inférieur à 1 quelle que soit la valeur de f_c et, sous réserve de la validité du modèle au delà des très grandes valeurs de f_c, on peut maintenant écrire le coefficient de corrélation spatiale sous la forme :

II(97) $$\tilde{\gamma}(0,\tau) = \lim_{f_c \to \infty} \tilde{\gamma}_{f_c}(0,\tau) = \lim_{f_c \to \infty} \frac{\int_0^{f_c} \bar{n}(f)\, K(f) \cos 2\pi f\tau \, df}{\int_0^{f_c} \bar{n}(f)\, K(f)\, df}$$

De la même manière, on définit le coefficient de corrélation croisée entre les points M et M', avec $r = |\overrightarrow{MM'}|$ par :

II(98) $$\tilde{\gamma}(r,\tau) = \frac{\tilde{N}(M,M',\tau)}{\left[\tilde{N}(M,M,0)\,\tilde{N}(M',M',0)\right]^{1/2}} = \frac{\tilde{N}(M,M',\tau)}{\tilde{N}(M,M,0)}$$

ce qui conduit à

II(99) $$\tilde{\gamma}(r,\tau) = \lim_{f_c \to \infty} \tilde{\gamma}_{f_c}(r,\tau)$$

avec

II(100) $$\tilde{\gamma}_{f_c}(r,\tau) = \frac{R_e\left\{\iint_{\mathcal{D}(f_c)} K_1(k_x,k_y) \exp j(\bar{\omega}\tau - k_x x - k_y y)\, dk_x\, dk_y\right\}}{\iint_{\mathcal{D}(f_c)} K_1(k_x,k_y)\, dk_x\, dk_y}$$

expression qui se déduit aisément de II(80) en limitant au domaine $\mathcal{D}(f_c)$, limité par la courbe $C(f_c)$ l'intégration dans le plan des nombres d'ondes.

Le problème est alors complètement résolu. Au chapitre suivant, nous illustrerons ces résultats par des exemples, dans le cas de structures assez simples telles que membranes ou panneaux plans et cylindriques, rencontrés fréquemment en construction mécanique.

Chapitre III

CARACTÉRISTIQUES DYNAMIQUES GLOBALES DE QUELQUES STRUCTURES EN VIBRATION DE FLEXION

Nous nous proposons dans ce chapitre de particulariser les résultats précédents en étudiant quelques problèmes simples (membranes ou panneaux plans), puis le cas plus compliqué d'une structure cylindrique. Pour simplifier, nous ne considèrerons que des problèmes bidimensionnels, c'est-à-dire que nous partirons des équations du mouvement établies sous les hypothèses de structures minces. D'autre part, nous n'aurons à examiner ici que des problèmes de vibration en milieu homogène puisqu'il a été montré ailleurs que les milieux localement homogènes pouvaient, suivant nos approximations, être abordés au moyen de leur « structure homogène de référence ».

1. VIBRATIONS D'UNE MEMBRANE UNIFORMÉMENT TENDUE

Le mouvement libre d'une membrane uniformément tendue, de tension superficielle T et de masse surfacique $\bar{\rho}$, est solution de l'équation :

III(1) $$\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\, w(M,t) = 0 \qquad c^2 = \frac{T}{\bar{\rho}}$$

et les solutions où le temps se sépare, de la forme :

$$w(M,t) = w_0(M) \exp j\omega t$$

vérifient donc :

III(2) $$\nabla^2 w_0 - k^2 w_0 = 0$$

III(3) avec $$k = \frac{\omega}{c}$$

∇^2 désignant l'opérateur Laplacien. Nous allons examiner successivement le problème d'une membrane rectangulaire de dimensions L_{ox}, L_{oy} puis celui d'une membrane circulaire de rayon R et nous montrerons que, dans le cadre de l'approximation des grands nombres d'ondes, les résultats établis dans le premier cas sont également valables dans le second, conformément à l'exposé général qui précède.

Notons au préalable que, en milieu **indéfini**, les solutions libres correspondant à une propagation de la forme

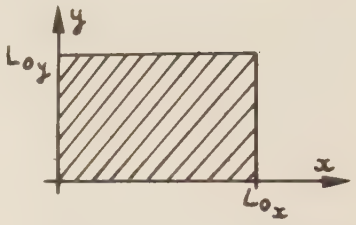
$$w(M,t) = w_0 \exp j\left(\omega t - \vec{k}.\vec{M}\right)$$

représentent une onde plane se dirigeant dans la direction du vecteur $\vec{k}$ avec la vitesse de phase c , uniforme en azimut d'après III(3) et indépendante de la fréquence. La vitesse de groupe $V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ est égale à la

vitesse de phase C. La membrane est donc **non dispersive et non directive**. Dans le plan des vecteurs d'ondes, les courbes $C(f)$ sont donc des circonférences de rayon k donné par III(3).

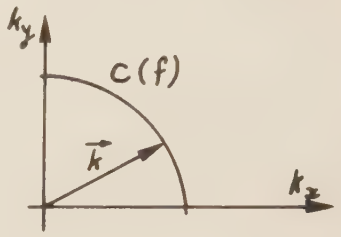
1,1. Membrane rectangulaire uniformément tendue

Le problème admet des solutions à variables séparées de la forme :



III(4) $$\omega_o(M) = \sin\frac{m\pi x}{L_{ox}} \sin\frac{m\pi y}{L_{oy}}$$

et, à chaque mode est associé une cellule élémentaire du plan (k_x, k_y) de côtés $\frac{\pi}{L_{ox}}$, $\frac{\pi}{L_{oy}}$. On peut appliquer directement les résultats du chapitre II pour le calcul de la densité modale de la membrane. On a alors :



II(20 $$\bar{n}'(\varphi, f) = \frac{2A_o}{\pi} \frac{\bar{k}(\varphi, f)}{|V_g(\varphi, f)|}$$

ce qui donne :

III(5) $$\boxed{\left[\bar{n}'(\varphi, f)\right]_{mb} = \frac{4A_o}{c^2} f}$$

avec $$\bar{n}'(\varphi, f) = \frac{2}{\pi}\bar{n}(f)$$

III(6) soit $$\boxed{\left[\bar{n}(f)\right]_{mb} = \frac{2\pi A_o}{c^2} f}$$

La distribution angulaire de la densité modale est constante en azimut et la densité modale est proportionnelle à la fréquence. On en déduit l'admittance d'entrée de la membrane indéfinie donnée par II(36) soit

III(7) $$\boxed{\left[G_{V\infty}(f)\right]_{mb} = \frac{\bar{n}(f)}{4M_{oT}} = \frac{\pi|f|}{2T}}$$

où $|f|$ est introduit pour obtenir une expression valable pour les valeurs positives et négatives de la fréquence.

La fonction de Green généralisée se calcule immédiatement en utilisant II(69) et II(72). En posant $|\overrightarrow{MM'}| = r$ et en tenant compte de la symétrie du problème par rapport à l'origine (on s'intéresse ici à nouveau à la membrane indéfinie «réverbérante»), il vient :

$$\tilde{\varphi}_{mb}(M, M', f) = \frac{K(f)}{8M_T} \int_0^{\pi} \bar{n}'(\varphi, f) \cos(kr\cos\varphi)\, d\varphi$$

soit, en utilisant III(5) :

III(8) $$\tilde{\varphi}_{mb}(M, M', f) = \frac{K(f).f}{2T} \int_0^{\pi} \cos(kr\cos\varphi)\, d\varphi$$

L'intégrale vaut $\pi J_o(kr)$, où J_o est la fonction de Bessel de première espèce et d'ordre zéro. En tenant compte de III(7), on a donc finalement :

III(9) $$\boxed{\tilde{\varphi}_{mb}(M, M', f) = \left[G_{V\infty}(f)\right]_{mb} K(f)\, J_o(kr)}$$

En particulier, le spectre de puissance en tout point est

III(10) $$\tilde{\varphi}_{mb}(M,M,f) = \left[G_{V_o}(f)\right]_{mb} \cdot K(f)$$

On en déduit que le coefficient de corrélation spatiale instantanée, à la fréquence f, vaut $J_o(kr)$ On retrouve bien, dans ce cas comme dans tous les exemples de propagation bidimensionnelle **non directive,** le résultat classique obtenu en acoustique.

1,2. Membrane circulaire uniformément tendue

Dans ce cas, si la membrane possède le rayon R, on est amené à des solutions libres de la forme [24] :

III(11) $$w(M,t) = \cos n\theta\, J_n(kr) \exp j\omega t$$

les J_n étant les fonctions de Bessel de première espèce, d'ordre n. Les valeurs de k satisfaisant la condition sur le pourtour sont solutions de

III(12) $$J_n(kR) = 0$$

Nous nous intéressons au cas où kr est suffisamment grand ($r \neq 0$), c'est-à-dire au cas où il existe un grand nombre de nœuds dans chacune des directions radiales, entre 0 et R. Alors, le développement asymptotique de $J_n(kr)$ donne :

III(13) $$J_n(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left[kr - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

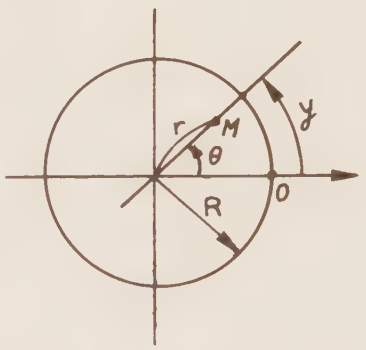
et III(12) est maintenant sensiblement identique à

III(14) $$\cos\left[kR - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] = 0$$

soit $$kR - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = (2p+1)\frac{\pi}{2} \qquad p = 0, 1, \ldots$$

On en déduit que les valeurs de k successives sont distantes de la quantité

III(15) $$\Delta k = \frac{\pi}{R}$$



Prenons alors pour coordonnées d'un point M l'abscisse curviligne y suivant le cercle de rayon R et la longueur radiale r.

En posant $\theta = \frac{y}{R}$, la forme propre asymptotique s'écrit donc :

$$w_o(M) \simeq w_o \cos k_y y \cos\left[kr - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right]$$

avec $k_y = \frac{n\pi}{L_{oy}}$ et $L_{oy} = \pi R$ (demi-périmètre du cercle). On a donc, quand n varie d'une unité :

III(16) $$\Delta k_y = \frac{\pi}{L_{oy}}$$

et on peut établir maintenant la correspondance avec le cas d'une membrane rectangulaire en posant

$L_{ox} \sim R$ d'après III(15)

$L_{oy} \sim \pi R$ d'après III(16).

On constate alors que l'aire $A_o = L_{ox} L_{oy}$ de la membrane rectangulaire est bien identique à celle de la membrane circulaire (πR^2). Dès lors, il est possible d'utiliser l'ensemble des résultats précédents pour la membrane circulaire, ce que nous avions prévu grâce aux considérations d'ordre plus général développées au chapitre II.

2. VIBRATIONS DE FLEXION D'UN PANNEAU PLAN

Nous partons des résultats de la théorie élémentaire de la flexion des plaques, c'est-à-dire que nous cherchons les solutions de l'équation :

III(17) $$\alpha^2 \nabla^4 \omega + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \omega = 0$$

avec

III(18) $$\begin{cases} \alpha_o^2 = \dfrac{c_L^2 h^2}{12} \\ c_L^2 = \dfrac{E}{\rho(1-\nu^2)} \end{cases}$$

C_L étant la vitesse de propagation des ondes longitudinales dans le milieu et h l'épaisseur du panneau.

2,1. Densité modale

En milieu indéfini, une propagation par ondes planes entraine la relation de dispersion :

III(19) $$\omega = \alpha_o k^2$$

avec $$k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

La vitesse de propagation de la phase est :

III(20) $$c = \frac{\omega}{k} = \alpha_o k = \sqrt{\alpha_o \omega}$$

et la vitesse de groupe est :

III(21) $$V_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = 2\sqrt{\alpha_o \omega} = 2c$$

Le milieu est donc **non directif** et **dispersif.**

L'application directe des résultats du chapitre II conduit alors à la densité modale :

III(22) $$\boxed{\bar{n}(f)_{pl} = \frac{A_o}{2\alpha_o} = \frac{\sqrt{3}\, A_o}{c_L h}}$$

et

III(23) $$\boxed{\left[\bar{n}'(\varphi, f)\right]_{pl} = \frac{2}{\pi}\left[\bar{n}(f)\right]_{pl}}$$

On remarque que l'une et l'autre sont indépendantes de la fréquence, ce qui est un résultat classique [31].

D'autre part, l'admittance d'entrée de la plaque infinie est

III(24) $$\boxed{\left(G_{V\infty}\right)_{pl} = \frac{\sqrt{3}}{4\rho h^2 C_L} = \frac{\bar{n}(f)}{4M_T}}$$

et est elle aussi indépendante de la fréquence. Ce résultat avait déjà été établi d'une manière directe par *Smith* et *Lyon* [7], grâce à une transformation de Fourier spatiale de III(17) (avec un second membre représentant l'impulsion à l'origine de l'espace, au temps $t=0$).

2,2. Fonction de Green généralisée

On calcule ensuite comme précédemment la fonction de Green généralisée pour la plaque, en fonction de la seule variable radiale $r = |\overrightarrow{MM'}|$ puisque le milieu est non directif et on obtient :

III(25) $$\boxed{\varphi_{pl}(M,M',f) = \left(G_{V\infty}\right)_{pl} \cdot K(f)\, J_0(kr)}$$

expression analogue à III(9), c'est-à-dire au résultat relatif à la membrane indéfinie. La différence fondamentale entre ces deux expressions réside dans la relation entre k et ω puisque le coefficient de corrélation instantanée, à la fréquence f est ici $J_0\left(\sqrt{\frac{2\pi f}{\alpha_0}}\, r\right)$, où l'argument varie comme la racine carrée de la fréquence (et non proportionnellement à f comme c'était le cas pour la membrane).

Par transformation de Fourier de III(25), on obtiendrait le résultat déjà établi d'une manière directe au chapitre II, c'est-à-dire le noyau spatio-temporel (avec $K(f) = K_1 = C^{te}$)

II(91) $$\tilde{N}(M,M',\tau) = \frac{A_0}{4M_T} K_1 \cdot \frac{1}{2\alpha_0|\tau|} \sin\left(\frac{r^2}{4\alpha_0|\tau|}\right)$$

Alors, si $K(f)$ est une fonction de la fréquence, on obtient à la place de II(51), l'expression :

III(26) $$\boxed{\tilde{N}(M,M',\tau) = \left[\frac{A_0}{4M_T} \frac{1}{2\alpha_0|\tau|} \sin\left(\frac{r^2}{4\alpha_0|\tau|}\right)\right] \underset{\tau}{*} \mathcal{F}^{-1}[K(f)]}$$

où $\mathcal{F}^{-1}[K(f)]$ désigne l'inverse de Fourier de $K(f)$, et $\left(\underset{\tau}{*}\right)$ le produit de convolution sur la variable temporelle.

3. VIBRATIONS DE FLEXION D'UN PANNEAU CYLINDRIQUE

3,1. Equations du mouvement

Dans le cadre des hypothèses simplificatrices de Donnell, les équations du mouvement libre d'un panneau cylindrique mince et homogène s'écrivent :

$$\text{III(27)} \quad \begin{cases} u'' + \frac{1}{2}(1-\gamma)\dot{u}' + \frac{1}{2}(1+\gamma)\dot{v}' + \frac{\gamma}{a}w' = \frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{1}{2}(1+\gamma)u' + \dot{v}' + \frac{1}{2}(1-\gamma)v'' + \frac{1}{a}w' = \frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\gamma}{a}u' + \frac{1}{a}v' + \frac{w}{a^2} + \beta a^2 \nabla^4 w = \frac{1}{c_L^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases}$$

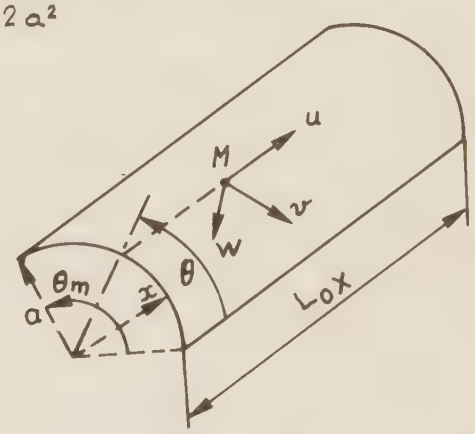
où u, v, w sont respectivement les composantes longitudinale, tangentielle et radiale du mouvement, avec les notations :

$$\text{III(28)} \quad ( )' = \frac{\partial}{\partial x}( ),\ \dot{( )} = \frac{\partial}{\partial y}( ),\ \nabla^2( ) = ( )'' + \dot{( )}'$$

$$y = a\theta,\quad c_L^2 = \frac{E}{\rho(1-\gamma^2)},\quad \beta = \frac{h^2}{12a^2}$$

et où :

- a : rayon moyen du panneau
- L_{ox} : longueur du panneau
- h : épaisseur du panneau
- ρ : masse spécifique du matériau
- E : module d'Young du matériau
- γ : coefficient de Poisson du matériau



Le panneau constitue ainsi une portion de cylindre de dimensions L_{ox} et L_{oy}, où L_{oy} est la longueur de l'arc de circonférence de rayon moyen a et d'angle au centre θ_m $\quad (L_{oy} = a\,\theta_m)$

Suivant une approximation classique, si on s'intéresse aux vibrations de flexion caractérisée par une composante radiale w prépondérante, on peut négliger les composantes longitudinale et tangentielle de la force d'inertie, c'est-à-dire annuler les seconds membres des deux premières équations III(27). Par élimination de u et v l'ensemble de ces trois équations se ramène alors à la seule équation aux dérivées partielles du 8^e ordre portant sur la composante radiale w :

$$\text{III(28.a)} \quad \frac{c_L^2}{a^2}\left[\beta a^4 \nabla^8 w + (1-\gamma^2)\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right] = -\frac{\partial}{\partial t^2}\left(\nabla^4 w\right)$$

qui peut encore s'écrire :

$$\text{III(28.b)} \quad \frac{c x_o^2}{2}\left[\frac{1}{(2k_R)^2}\nabla^8 w + (2k_R)^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right] + \frac{\partial}{\partial t^2}\left(\nabla^4 w\right) = 0$$

où l'on a posé :

$$\text{III(29)} \quad c x_o = \sqrt{2}\,c_L\left[\beta(1-\gamma^2)\right]^{1/4}$$

$$2k_R = \frac{1}{a}\left[\frac{1-\gamma^2}{\beta}\right]^{1/4}$$

3,2. Relations de dispersion

En milieu indéfini, les solutions de propagation de la forme

III(30) $$\omega = W_o \exp j(\omega t - \vec{k}\vec{M})$$

vérifient donc l'une des relations suivantes correspondant à II(16)

III(31.a) $$\omega = \frac{C_L}{a}\left[\frac{(1-\gamma^2)\,k_x^4}{(k_x^2+k_y^2)^2} + \beta a^4 (k_x^2+k_y^2)^2\right]^{1/2}$$

ou

III(31.b) $$\omega = \omega_a \left[\left(\frac{k}{2k_R}\right)^4 + \cos^4\varphi\right]^{1/2}$$

ou

III(31.c) $$\omega = \frac{C_{xo}}{\sqrt{2}}\, k_x \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right)^{1/2}$$

après avoir posé :

III(32) $$\omega_a = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$
$$\alpha = \frac{2k_R k_x}{k_x^2+k_y^2}$$
$$\cos\varphi = \frac{k_x}{[k_x^2+k_y^2]^{1/2}}$$

$f_a = \frac{\omega_a}{2\pi}$ étant la fréquence fondamentale du mode « en anneau » du cylindre circulaire fermé de rayon a, et correspondant à une extension pure de sa surface moyenne.

G. Coupry [18] a montré, en partant des équations de Love pour les coques, que III(31.a) fournissait bien les fréquences propres des modes d'un cylindre, à condition de supposer : $\beta = \frac{h^2}{12\,a^2} \ll 1$

et $$\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}h\right)^2 \ll \lambda_y^2 \ll \lambda_x^2$$

avec $$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x} \quad , \quad \lambda_y = \frac{2\pi}{k_y}$$

Pour des conditions aux limites d'appui simple sur les bords, les fréquences propres correspondent alors aux nombres d'ondes quantifiés de la forme

$$k_x = m\frac{\pi}{L_{ox}} \quad , \quad k_y = \frac{n\pi}{L_{oy}}$$

3,3. Propriétés remarquables

Dans une étude détaillée du problème, on a montré [15] :

a) qu'aucune propagation d'onde de fréquence f ne pouvait être obtenue dans une direction d'angle φ inférieure à $\varphi_0(f)$ avec :

III(33) $$\cos \varphi_0 = \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^{1/2}$$

qui tend vers 1 quand f se rapproche de la fréquence d'anneau : les directions de propagation possibles tendent donc à occuper tout l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ quand la fréquence s'élève : le cylindre est donc de moins en moins directif.

b) que la vitesse de propagation de la phase, $C = \frac{\omega}{k}$ dépend de la fréquence et de la direction du vecteur de propagation $\vec{k}$, ce qui peut se voir immédiatement à partir des relations III(31).

c) que, si l'on se fixe la composante axiale $k_x = k_m$ du vecteur de propagation $\vec{k}$, en laissant k_y variable, les solutions de propagation ne peuvent être trouvées que pour des ondes de fréquence f supérieure à une fréquence minimale $f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$ telle que

III(34) $$\omega_m = C_{x0}\, k_m$$

En comparant avec III(31.a), on voit que ceci entraine

$$\alpha = 1$$

soit, en utilisant III(32) :

III(35) $$\left(k_x - k_R\right)^2 + k_y^2 = k_R^2$$

ce qui permet de déterminer la valeur de k_y correspondant à la valeur k_m de k_x. Quand k_x varie, le lieu des points qui correspondent à cette fréquence limite inférieure est donc le cercle III(35) centré sur l'axe k_x au point $k_x = k_R$, et de rayon égal à k_R.

A l'intersection de ce cercle et de la courbe $C(f)$ (correspondant à des propagations de fréquence f) la tangente à $C(f)$ est alors verticale ($\omega'_{k_y} = 0$) et la direction de propagation correspondante est définie par l'angle $\varphi_1(f)$ tel que :

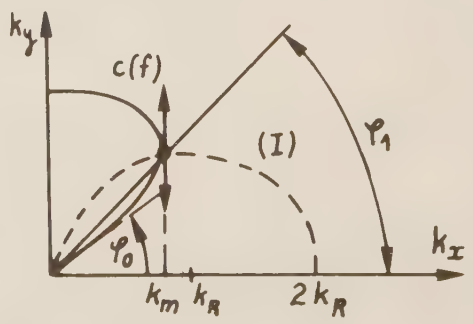
III(36) $$\cos \varphi_1 = 2^{-1/4} \left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^{1/2}$$

On a alors, de manière évidente (cf. figure ci-contre)

$$k_m = k \cos \varphi_1 = 2 k_R \cos^2 \varphi_1$$

soit, en remplaçant $\cos \varphi_1$ par son expression III(36) :

III(37) $$k_m = \sqrt{2}\, k_R \frac{\omega}{\omega_a}$$



3,4. Vitesse de groupe

En utilisant III(31b) il vient :

III(38) $$V_g(\varphi,\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \sqrt{2}\, C_{x_0} \frac{\omega_a}{\omega}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2 - \cos^4\varphi\right]^{3/4}$$

et, la vitesse de phase ayant pour expression

III(39) $$C(\varphi,\omega) = \frac{\omega}{k} = \frac{C_{x_0}}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{\omega_a}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2 - \cos^4\varphi\right]^{-1/4}$$

on en déduit immédiatement que :

III(40) $$V_g(\varphi,\omega) = 2\,C(\varphi,\omega)\left[1 - \left(\frac{\omega_a}{\omega}\right)^2 \cos^4\varphi\right]$$

En particulier, dans la direction $\varphi = \varphi_1$ correspondant à l'intersection de $C(f)$ et du cercle (I), $\cos\varphi_1$ est donné par III(36) et il vient :

III(41) $$C(\varphi_1,\omega) = C_{x_0} \cdot 2^{-1/4}\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^{1/2} = C_{x_0}\cos\varphi_1$$

Alors, d'après III(40), on a aussi

III(42) $$V_g(\varphi_1,\omega) = C(\varphi_1,\omega) = C_{x_0}\cos\varphi_1$$

Il en résulte que, si l'on observe **dans la direction d'une génératrice,** la propagation d'une onde dirigée suivant $\varphi = \varphi_1$, la vitesse de propagation **apparente** de la phase sera indépendante de la fréquence et égale à C_{x_0}. Alors, comme la vitesse de phase est égale à la vitesse de groupe d'après III(42), tout se passe, dans cette direction privilégiée et pour ce type d'ondes, comme si le milieu était non dispersif. Il en résulte des conséquences importantes en ce qui concerne le transfert des vibrations le long de l'axe longitudinal du panneau, comme nous le verrons en étudiant la fonction de Green généralisée de cette structure.

3,5. Densité modale

De ce qui précède, on déduit aisément la distribution angulaire de la densité modale du panneau cylindrique. Utilisant II(20), on trouve :

III(43) $$\bar{n}'(\varphi,f) = \begin{cases} \dfrac{2A_0}{\pi}\dfrac{1}{C_{x_0}^2}\dfrac{\omega}{\left[\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2 - \cos^4\varphi\right]^{1/2}} & \text{si } \varphi > \varphi_0 \\ 0 & \text{si } \varphi \leq \varphi_0 \end{cases}$$

et la densité modale s'écrit alors :

III(44) $$\bar{n}(f) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} \bar{n}'(\varphi,f)\, d\varphi & \text{pour } \dfrac{\omega}{\omega_a} \leq 1 \\ \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \bar{n}'(\varphi,f)\, d\varphi & \text{pour } \dfrac{\omega}{\omega_a} > 1 \end{cases}$$

Soit, après calculs, et en tenant compte de III(22), qui donne l'expression de la densité modale du panneau plan, supposé de même aire A_0 :

III(45)
$$\frac{[\bar{n}(f)]_{cyl}}{[\bar{n}(f)]_{pl}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\dfrac{\omega}{\omega_a}\right)^{1/2} F\left(\dfrac{\pi}{2}, \sqrt{\dfrac{1+\omega/\omega_a}{2}}\right) & \text{si } \dfrac{\omega}{\omega_a} < 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\pi}\left(\dfrac{2\,\omega/\omega_a}{1+\omega/\omega_a}\right)^{1/2} F\left(\dfrac{\pi}{2}, \sqrt{\dfrac{2}{1+\omega/\omega_a}}\right) & \text{si } \dfrac{\omega}{\omega_a} > 1 \end{cases}$$

où l'on a posé :

III(46)
$$F(\varphi, u) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{(1-u^2 \sin^2\theta)^{1/2}}$$

(intégrale elliptique incomplète de première espèce).

Ces résultats sont également valables **pour un cylindre circulaire fermé,** à condition de remplacer L_{oy} par π_a, demi-périmètre du cylindre (cf. fig. 1).

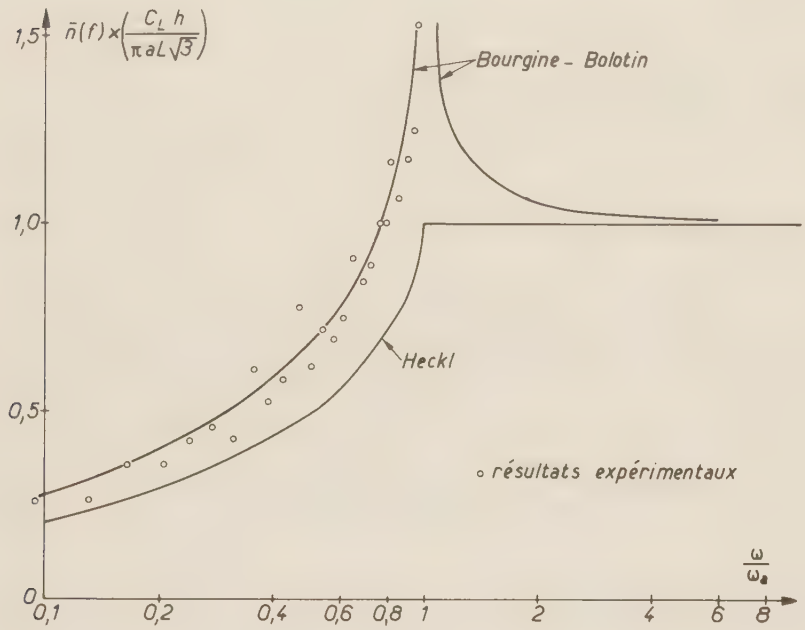


Fig. 1
Densité modale du cylindre.

La seconde expression III(45), valable pour des fréquences supérieures à la fréquence d'anneau, montre que la densité modale du panneau cylindrique tend asymptotiquement vers celle du panneau plan quand la fréquence augmente indéfiniment. En effet, comme on peut le voir aisément, le second membre de III(45) tend vers 1 quand ω tend vers l'infini. (Notons que cette extrapolation est purement mathématique, car elle n'est pas compatible avec les hypothèses simplificatrices conduisant aux équations de Donnell).

Plusieurs auteurs se sont attachés à la résolution de cette question. *Heckl* [12], partant d'une expression très simplifiée des relations de dispersion pour le cylindre, parvient à un résultat explicite qui sous-estime nettement la valeur de la densité modale pour $\frac{\omega}{\omega_a} < 1$. Au delà de la fréquence d'anneau, la densité modale est prise constante et égale à sa valeur asymptotique III(22). Par la suite, *Bolotin* [13] fournit des solutions valables pour des coques élastiques minces homogènes, dont l'application au cas du cylindre coïncide bien avec III(45), puis *Miller* et *Hart* [32] présentent une synthèse des travaux sur la question et un exposé des résultats de leur recherches expérimentales. Enfin *Szechenyi* [33], utilisant une méthode d'intégration graphique dans l'espace des vecteurs d'ondes, parvient à des résultats numériques très voisins de ceux présentés ici. Toutefois, aucun de ces auteurs ne présente de résultats relativement à la distribution angulaire de la densité

modale ni ne s'intéresse aux caractéristiques de la propagation de l'énergie dans une telle structure. Il semble donc que les résultats présentés dans cette étude du cylindre, de même que leur conséquences relativement au calcul de la fonction de Green généralisée, apportent une contribution originale aux travaux accomplis jusqu'à maintenant dans ce domaine.

3,6 Fonction de Green généralisée

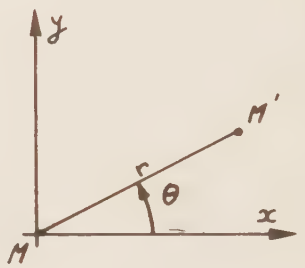
3,6.1. Expression analytique

En portant III(43) dans l'expression II(72) de la fonction de Green généralisée, on obtient aisément pour le panneau cylindrique :

$$\text{III(47)} \qquad \tilde{\varphi}\left(M,M',f\right) = \frac{A_o\,\omega_a}{4\pi\,C_{x_o}^2\,M_T}\,K(f)\int_{\varphi_o}^{\pi-\varphi_o}\frac{\frac{\omega}{\omega_a}}{\left[\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2-\cos^4\varphi\right]^{1/2}}\cos\left[\vec{k}(\varphi,f)\,\overrightarrow{M,M'}\right]d\varphi$$

où, d'après III(31.b), on doit prendre

$$\text{III(48)} \qquad \left|\vec{k}\left(\varphi,\omega\right)\right| = 2k_R\left[\left(\frac{\omega}{\omega_a}\right)^2-\cos^4\varphi\right]^{1/4}$$



Posant alors $|\overrightarrow{MM'}| = r$ et $\left(\overrightarrow{ox},\overrightarrow{MM'}\right) = \theta$

puis :

$$\text{III(49)} \qquad \gamma = \frac{\omega}{\omega_a}$$

il vient :

$$\text{III(50)} \qquad \boxed{\begin{aligned}\tilde{\varphi}\left(M,M',f\right) &= \frac{A_o\,\omega_a}{4\pi\,C_{x_o}^2\,M_T}\,K(f)\,\gamma\;I\left(r,\theta,\gamma\right)\\ I\left(r,\theta,\gamma\right) &= \int_{\varphi_o}^{\pi-\varphi_o}\frac{\cos\left[2k_R r\left(\gamma^2-\cos^4\varphi\right)^{1/4}\cos\left(\varphi-\theta\right)\right]}{\left[\gamma^2-\cos^4\varphi\right]^{1/2}}\,d\varphi\end{aligned}}$$

L'intégrale III(50) doit en général être calculée numériquement. Toutefois, les choses sont plus simples et peuvent être interprétées d'une manière intéressante si on calcule la fonction de Green généralisée en deux points situés **sur une même génératrice.** Alors, on obtient, en faisant $\theta=0$:

$$I\left(r,0,\gamma\right) = \int_{\varphi_o}^{\pi-\varphi_o}\frac{\cos\left[2k_R r\left(\gamma^2-\cos^4\varphi\right)^{1/4}\cos\varphi\right]}{\left[\gamma^2-\cos^4\varphi\right]^{1/2}}\,d\varphi$$

et cette intégrale peut, après quelques transformations, être ramenée à la forme :

$$\text{III(51)} \qquad I\left(r,0,\gamma\right) = \gamma^{-1/2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\left[\frac{2\pi f r}{c_{x_o}}\sqrt{\sin 2u}\right]\left\{\frac{1}{\left[\cos u\left(1-\gamma\cos u\right)\right]^{1/2}}+\frac{1}{\left[\sin u\left(1-\gamma\sin u\right]^{1/2}\right.}\right\}d\varphi$$

La fonction $F\left(r,\gamma\right) = \gamma^{1/2}\,I\left(r,0,\gamma\right)$ a été calculée et est représentée fig. III,2 en fonction de la fréquence pour plusieurs valeurs de l'écartement $r = |\overrightarrow{MM'}|$ des points sur la génératrice du panneau. On observe que cette fonction oscille avec une enveloppe décroissante, et a l'allure d'une fonction de Bessel J_o Sa représentation normalisée est donnée fig. 2 en fonction du seul paramètre sans dimension $\bar{\tau} = \frac{2\pi f r}{c_{x_o}}$ (pour plusieurs valeurs de l'écartement r) et on peut constater que les points de calcul à f et r variables sont représentés à très peu près sur une courbe unique ne dépendant que de $\bar{\tau}$, c'est-à-dire du produit (fr).

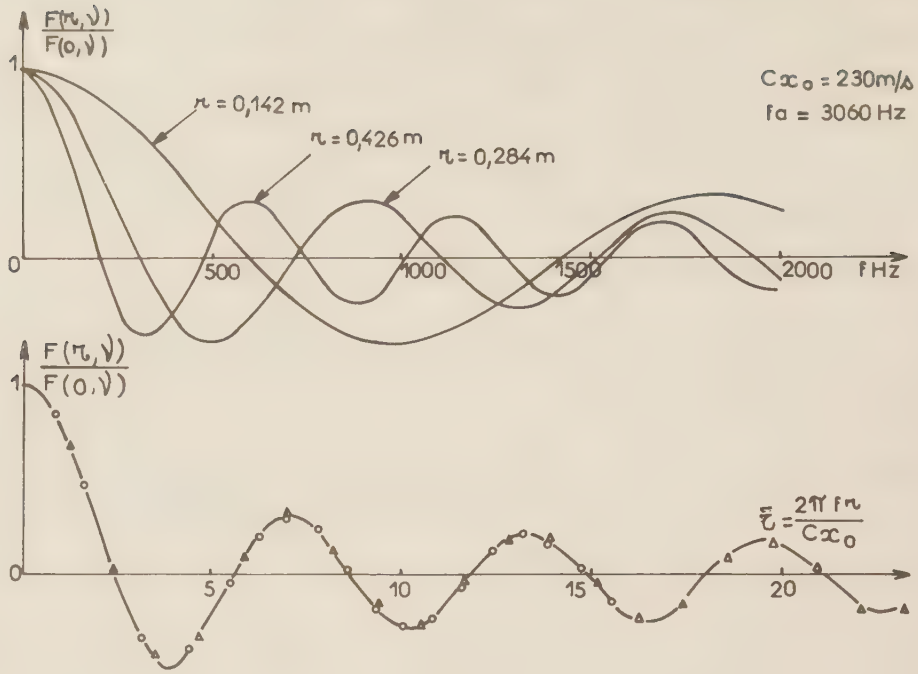


Fig. 2

Représentation normalisée de la fonction de Green généralisée.

Alors, par le changement de variable

$$\alpha = \sqrt{\sin 2u}$$

dans III(51), on obtient :

III(52) $$I(r,o,\gamma) = 2^{-3/4}\,\gamma^{-1/2} \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2\pi f r}{C_{x_o}}\,\alpha\right)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\; A(\alpha,\gamma)\,d\alpha$$

où $A(\alpha,\gamma)$ est une fonction dont l'analyse montre qu'elle varie très peu dans le domaine (α,γ) autorisé. Son expression exacte est :

III(53) $$A(\alpha,\gamma) = \left[\left(\frac{2}{1+\alpha}\right)^{1/2} - \frac{\gamma\sqrt{2}}{1+\alpha^2} + \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\left(1-\gamma^2\sqrt{1+\alpha^2}+\frac{\alpha^2\gamma^2}{2}\right)^{1/2}\right]^{1/2}$$

En prenant en première approximation $A(\alpha,\gamma) = C^{te}$, l'intégrale III(52) est alors proportionnelle à la fonction de Bessel $J_o\left(\frac{2\pi f r}{C_{x_o}}\right)$ ce qui confirme bien l'impression initiale.

En résumant ces résultats, on peut écrire le **coefficient** de corrélation spatiale instantanée, à la fréquence f, sous la forme

III(54) $$\tilde{\eta}(r,o,f) = \frac{I(r,o,\gamma)}{I(o,o,\gamma)} = \frac{\int_o^1 \cos\left(\frac{2\pi f r}{C_{x_o}}\alpha\right)\frac{A(\alpha,\gamma)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,d\alpha}{\int_o^1 \frac{A(\alpha,\gamma)}{\sqrt{1-\alpha^2}}\,d\alpha}$$

ou encore, en posant $\alpha = \cos u$

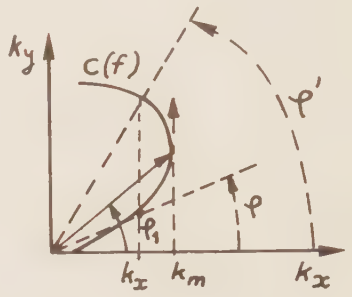
III(54bis) $$\boxed{\tilde{\eta}(r,o,f) = \frac{\int_o^{\pi/2} \cos\left(\frac{2\pi f r}{C_{x_o}}\cos u\right) A(\cos u,\gamma)\,du}{\int_o^{\pi/2} A(\cos u,\gamma)\,du}}$$

et, dans l'approximation $A(\alpha, r) = C^{te}$

III(55) $$\boxed{\tilde{\eta}(r, o, f) \simeq J_o\left(\frac{2\pi f r}{C_{x_o}}\right)}$$

3,6.2. Interprétation physique

On constate donc que, dans la direction longitudinale, tout se passe comme si on était en présence d'une propagation d'ondes, uniforme en azimut, de nombre d'onde $k = \frac{2\pi f}{C_{x_o}}$ (en première approximation). Or, d'après ce que nous avons écrit précédemment (formule III(34)), ce nombre d'onde correspond dans la structure à une propagation dans la direction $\varphi = \varphi_1$ définie par III(36) et nous avons vu au paragraphe 3,4 que, pour cette direction, la vitesse de phase apparente suivant une génératrice était bien C_{x_o}, quantité indépendante de f. Une étude détaillée du problème permet de montrer que, si l'on appelle φ et φ' les angles correspondant aux intersections de la droite $k_x = C^{te}$ avec la courbe $C(f)$ on peut écrire :



III(56) $$k_x = \frac{\omega}{C_{x_o}} \frac{\cos\varphi \cos\varphi'}{\cos^2\varphi_1}$$

Alors, lorsque φ passe de φ_o à φ_1, où φ_o est défini par III(33), φ' passe de φ_1 à $\frac{\pi}{2}$ et l'approximation III(55) revient à dire qu'il existe un angle u évoluant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ quand φ évolue de φ_o à φ_1, tel que

III(57) $$\cos u = \frac{\cos\varphi \cos\varphi'}{\cos^2\varphi_1}$$

Alors, l'intégration pour l'ensemble des directions u fournit bien la fonction de Bessel $J_o\left(\frac{2\pi f r}{C_{x_o}}\right)$

Dans la direction longitudinale, tout se passe donc comme si on était en présence d'une **structure réverbérante non directive et non dispersive.**

REMARQUE

Ceci explique les conclusions, à notre avis erronnées, tirées par Stearn [35], à la suite d'une étude expérimentale réalisée par lui-même sur une plaque et un cylindre soumis à l'excitation aléatoire due à un jet d'air turbulent. Parti d'un modèle de corrélation de la forme $J_o(kr)$, Stearn constate que les résultats de l'expérience sur le cylindre, en des points situés sur une génératrice, se répartissent sur des courbes oscillant « comme la fonction de Bessel Jo ». Toutefois, en raison de la variation de k avec la fréquence (et, en toute rigueur, comme nous l'avons vu, avec la direction de propagation) cet auteur montre que la fonction $J_o(kr)$ représente très mal le phénomène réel pour les fréquences inférieures à la fréquence d'anneau et, de ce fait, est conduit à rejeter l'hypothèse de milieu réverbérant. Notre analyse montre au contraire que, suivant la direction axiale, **tout se passe comme si le champ vibratoire était parfaitement diffus,** *dans un milieu non dispersif où la vitesse de phase des ondes garderait la valeur constante C_{x_o} ; le nombre d'onde k qui intervient dans l'argument de la fonction de Bessel vaut alors simplement $\frac{2\pi f}{C_{x_o}}$. Dans ces conditions, il semble bien que les résultats de Stearn obéissent très convenablement au modèle proposé, comme nous le montrerons nous-mêmes au chapitre V de cette étude.*

Remarquons également que les choses sont moins simples lorsque l'on considère ce qui se passe suivant des directions quelconques de la surface moyenne du panneau cylindrique. On doit alors utiliser les méthodes numériques pour évaluer III(50). Nous en montrerons les résultats dans le chapitre consacré à l'étude expérimentale, à titre de confrontation avec les données de l'essai.

3,6.3. Expression spatio-temporelle

La transformée de Fourier d'une expression du type III(50) ne peut pas aboutir à un résultat explicite et doit être opérée numériquement. On peut cependant, dans le cas où $\theta = 0$ c'est-à-dire encore suivant l'axe longitudinal, obtenir des informations intéressantes grâce à la méthode de la phase stationnaire, en supposant à nouveau que $K(f)$ varie très peu en fonction de la fréquence.

Nous partons pour cela de l'expression II(80)

$$\text{II(80)} \qquad \widetilde{N}(M,M',\tau) = \frac{A_0}{4\pi M_T} K_1 R_e \left\{ \iint_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(j\bar{\omega}\tau - k_x x - k_y y\right) dk_x\, dk_y \right\}$$

où $\bar{\omega}$ est maintenant donné par III(31) et où l'on doit poser $y = 0$ pour étudier ce qui se passe suivant une génératrice du panneau. On ne peut ici utiliser directement le résultat II(85) pour évaluer $\widetilde{N}(M,M',\tau)$ En effet, la condition de stationnarité de la phase donne :

$$\text{III(58)} \qquad \begin{cases} \bar{\omega}'_{k_x}\ \tau - x = 0 \\ \omega'_{k_y} = 0 \end{cases}$$

et la seconde de ces relations impose à (k_x, k_y) de vérifier la relation III(35) comme nous l'avons vu au paragraphe 3,3, c'est-à-dire que la courbe (I) sur laquelle Φ est stationnaire est le cercle de rayon k_R centré au point $k_x = k_R$. Mais, dans ces conditions, on a aussi, d'après III(34) :

$$\text{III(59)} \qquad \omega'_{k_x} = C_{x_0}$$

soit, d'après la première relation III(58) :

$$\text{III(60)} \qquad x - C_{x_0}\tau = 0$$

Alors, un développement limité de la phase $\Phi = \bar{\omega}\tau - k_x x$ au voisinage du point k_{y_0} tel que $k_{y_0}^2 = k_x(2k_R - k_x)$ (fourni par III(35)) permet d'écrire :

$$\Phi(k_x, k_y) = \Phi(k_x, k_{y_0}) + \frac{(k_y - k_{y_0})^2}{2} \left(\omega''_{k_y^2}\right)_0 \tau$$

ce qui permet de transformer II(80) :

$$\widetilde{N}_{long}(M,M',\tau) = \frac{A_0}{4\pi M_T} K_1 R_e \left\{ \int_{-2k_R}^{+2k_R} \exp j\left[k_x(C_{x_0}\tau - x)\right] dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} \exp j\left[\frac{(k_x - k_y)^2}{2} \omega''_{k_y^2} \tau\right] dk_y \right\}$$

L'intégration suivant k_x étant maintenant limite à l'intervalle $(-2k_R, +2k_R)$

Après calcul, ceci se met finalement sous la forme :

$$\widetilde{N}_{long}(M,M',\tau) = \frac{A_0}{2\sqrt{2\pi}\, M_T} K_1 \frac{1}{[|\tau|]^{1/2}} R_e \left\{ \exp j\varepsilon\frac{\pi}{4} \int_{-2k_R}^{+2k_R} \frac{\exp j\left[k_x(C_{x_0}\tau - x)\right]}{\left[|\omega''_{k_y}|\right]^{1/2}} dk_x \right\}$$

soit

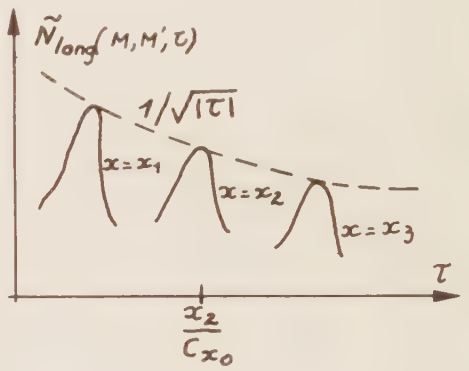
III(61) $$\tilde{N}_{long}(M,M',\tau) = \frac{A_0}{2\sqrt{2\pi}\,M_T}\,K_1\,\frac{1}{[|\tau|]^{1/2}}\,P(C_{x_0}\tau - x)$$

où l'on a posé :

III(62) $$P(u) = R_e\left\{\exp j\,\varepsilon\,\frac{\pi}{4}\int_{-2k_R}^{+2k_R}\frac{\exp j\,k_x u}{[|\omega''_{k_y}|]^{1/2}}\,dk_x\right\}$$

En d'autres termes, la fonction d'intercorrélation longitudinale sera maximum à chaque fois que $C_{x_0}\tau - x$ sera nul, mais l'amplitude des maxima décroît comme $\frac{1}{\sqrt{|\tau|}}$ par suite de la dispersion.

L'allure générale du résultat est indiqué par la figure ci-contre. Au delà d'une certaine distance ΔL, on voit que la fonction d'intercorrélation est négligeable et que les vibrations peuvent être considérées comme statistiquement indépendantes. Cette distance correspond à une propagation à la vitesse C_{x_0} : on peut donc dire, en observant cette propagation dans des axes entraînés suivant Ox avec la vitesse C_{x_0}, que le train d'ondes qui se propage possède une durée de cohérence égale à $\frac{\Delta L}{C_{x_0}}$. Dans le cas général où $K(f)$ varie avec la fréquence, on doit s'attendre à ce que la courbe enveloppe des maxima évolue suivant une loi différente de celle en $\frac{1}{\sqrt{|\tau|}}$ qui résulte de notre hypothèse. L'expression III(61) n'en constitue pas moins un modèle auquel il sera utile de confronter les résultats expérimentaux pour en faciliter l'interprétation.



Chapitre IV

APPLICATION AU CALCUL DU TRANSFERT D'ÉNERGIE ENTRE UNE STRUCTURE RÉVERBÉRANTE ET UN SYSTÈME MÉCANIQUE LINÉAIRE, AVEC LIAISONS PONCTUELLES

---

1. POSE DU PROBLÈME

La théorie globale que nous venons d'exposer nous a conduit à un modèle mathématique des caractéristiques dynamiques d'une structure, idéalisant son comportement sous des hypothèses assez larges. Il est alors possible, si l'on connait les caractéristiques statistiques des charges qui s'exercent sur cette structure, de calculer la valeur moyenne du spectre de puissance de sa réponse en tout point grâce à la formule déduite de I(42).

IV(1) $$\widetilde{\Phi}_v(f) = \ll \widetilde{\varphi}\ Sp \gg = \int_{\Sigma_0 \times \Sigma_0} \widetilde{\varphi}(M_1, M_2, f)\, S_p(M_1, M_2, f)\, dM_1\, dM_2$$

où $\widetilde{\varphi}(M_1, M_2, f)$ désigne maintenant le spectre croisé de réponse aux points M_1 et M_2 quand la structure est le siège d'un champ vibratoire de type «réverbérant», selon le sens que nous avons donné à ce mot au chapitre II. L'expression de $\widetilde{\varphi}$ est fournie par II(72) en fonction de la distribution angulaire de la densité modale de la structure et du vecteur de propagation des ondes $\vec{k}(\varphi, f)$ On rappelle que

II(72) $$\widetilde{\varphi}(M_1, M_2, f) = \frac{\bar{n}(f)}{4M_T}\, K(f)\, \eta_0(M_1, M_2, f)$$

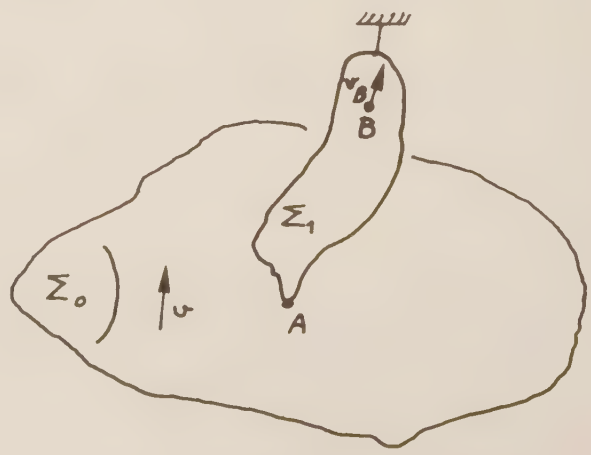
avec

II(63) $$\eta_0(M_1, M_2, f) = \int_0^{\pi} \frac{\bar{n}'(\varphi, f)}{2\bar{n}(f)} \cos\left[\vec{k}(\varphi, f)\, M_1 M_2\right] d\varphi$$

Alors, en intégrant IV.1, pour toutes les valeurs de la fréquence, on obtient la valeur quadratique moyenne de la réponse-vitesse, soit :

IV(2) $$\overline{v^2}^t = \sigma_v^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{\Phi}_v(f)\, df$$

Supposons alors que, sans modifier l'excitation, nous mettions la structure en contact avec un autre système mécanique au moyen d'une liaison que nous supposerons ponctuelle, localisée au point A (liaison unique pour le moment).



En admettant que le système Σ_1 ne reçoive d'énergie qu'au travers de sa liaison avec Σ_0, on peut se

demander quelles seront les caractéristiques statistiques de sa réponse en un point B quelconque, connaissant celles du champ réverbérant initial sur Σ_o.

Remarquons que cette question possède un sens pratique puisqu'il est fréquent de rencontrer une situation où un sous-ensemble Σ_1 est relié à une paroi élastique baignée extérieurement par un environnement acoustique ou aérodynamique fluctuant de manière aléatoire. Alors, par exemple si B désigne un instrument de mesure, il est important de savoir prédire le niveau de vibrations qu'il devra supporter, et prendre des précautions de montage appropriées.

Pour résoudre ce problème, nous allons faire appel à une méthode d'impédance mécanique dont nous rappelons le principe au paragraphe suivant. Les hypothèses du calcul consistent à admettre :

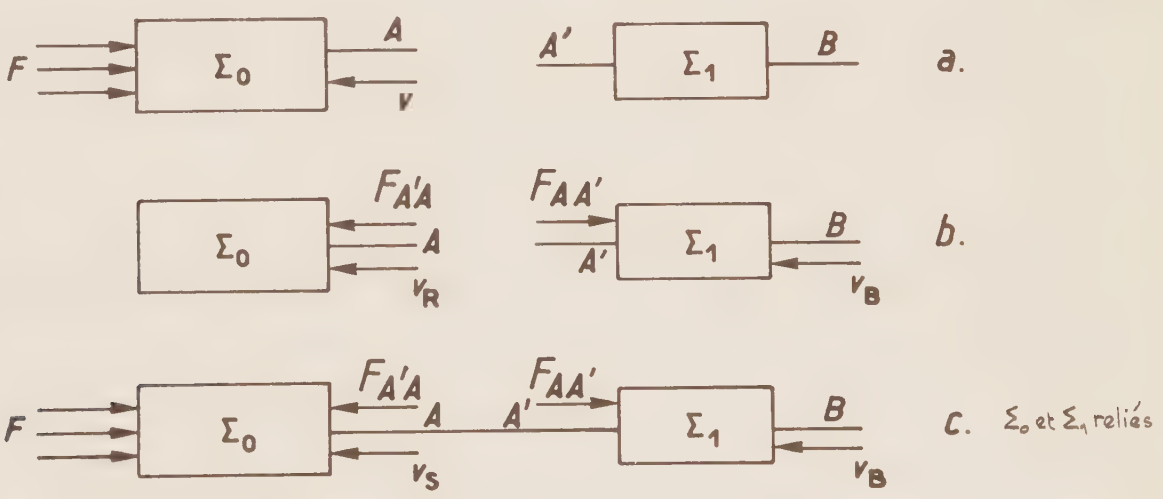
a) que le système vibrant Σ_1 est linéaire ;

b) que la liaison introduite en A entre Σ_o et Σ_1 ne perturbe sensiblement le champ vibratoire de vitesse v sur Σ_o qu'au voisinage immédiat du point A. Le champ sur Σ_o est donc presque partout réverbérant.

2. ÉQUATIONS DU SYSTÈME COUPLE AVEC LIAISON UNIQUE - MÉTHODE DES IMPÉDANCES MÉCANIQUES

2,1. Relations entrée-sortie

Nous schématisons les systèmes Σ_o et Σ_1 de la façon suivante :



a) Σ_o est un système linéaire à multiples entrées où s'exerçent des excitations F produisant à la sortie A la réponse v, lorsque Σ_o et Σ_1 ne sont pas reliés.

b) Si l'on supprime l'excitation sur Σ_o, à l'entrée, une force $F_{A'A}$ exercée en A y produit une réponse v_R telle que

$$F_{A'A} = Z_{AA}\, v_R$$

De même, une force $F_{AA'}$ exercée à l'entrée A' de Σ_1 produit en B la réponse v_B telle que

$$F_{AA'} = Z_{A'B}\, v_B$$

c) En reliant Σ_o et Σ_1, après avoir à nouveau excité Σ_o par des forces F, on doit écrire les conditions supplé-

mentaires :

$$v_S = v - v_R$$

$$F_{A'A} = -F_{AA'} = Z_{A'A'} v_S$$

De ces quatre relations, on tire aisément :

IV(3) $$v_B = -\frac{G_{A'B}}{G_{AA} + G_{A'A'}} v$$

où $G_{MN} = (Z_{MN})^{-1}$ sont les admittances de transfert ou d'entrée des deux systèmes.

Alors, en régime aléatoire, si on considère que le rapport $-\frac{G_{A'B}}{G_{AA} + G_{A'A'}}$ exprime la fonction de transfert entre l'entrée v et la sortie v_B du système couplé, il vient :

IV(4) $$\Phi_{v_B}(f) = \left|\frac{G_{A'B}}{G_{AA} + G_{A'A'}}\right|^2 \tilde{\Phi}_v(f)$$

où $\Phi_{v_B}(f)$ désigne le spectre de puissance de la réponse en B.

La valeur quadratique moyenne de cette réponse est donc :

IV(5) $$\overline{v_B^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{v_B}(f)\, df$$

2,2. Remarque

On observe que la relation IV(4) ne fait intervenir les propriétés de Σ_0 que par **l'admittance d'entrée** au point A. Nous avons montré au cours de cette étude que, dans le cadre de la schématisation adoptée, on a :

IV(6) $$G_{AA} = \frac{\bar{n}(f)}{4 M_T}$$

Il suffit donc de connaitre la densité modale de la structure Σ_0, soit par le calcul, soit **par une expérience** si la structure Σ_0 est trop complexe (en supposant valable dans ce cas l'hypothèse de champ réverbérant) et la masse M_T, pour résoudre complètement le problème du transfert entre Σ_0 et Σ_1.

3. APPLICATION AU CAS D'UN RÉSONATEUR MÉCANIQUE SIMPLE

Nous nous limiterons ici à un cas particulièrement simple où le système Σ_1 se réduit à un système masse-ressort-dash-pot. Ce modèle peut d'ailleurs représenter correctement le comportement d'un système Σ à plusieurs degrés de liberté si les fréquences propres successives de Σ_1 sont assez écartées les unes des autres.

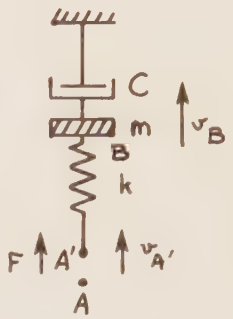
En effet l'admittance d'entrée de Σ_1 au point A' et l'admittance de transfert entre A' et B peuvent alors s'écrire respectivement :

IV(7)
$$\begin{cases} G_{A'A'} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2(A')\, A_i(f) \\ G_{A'B} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(A')\, s_i(B)\, A_i(f) \end{cases}$$

où les $s_i(M)$ sont les formes propres de Σ_1 isolé et où les $A_i(f)$ sont les admittances complexes de chaque mode. Alors, si les fréquences propres sont assez éloignées les unes des autres (les amortissements étant assez petits) on pourra calculer IV(4) au voisinage de chaque résonance f_i en négligeant les termes en $j \neq i$. On est alors ramené à un problème à un degré de liberté (cf. paragraphe 3,3).

Nous allons maintenant examiner le cas d'un système masse-ressort-dash-pot en **série**. Ce problème a déjà été traité directement par *Smith* et *Lyon* [7] et nous l'exposons ici comme cas particulier d'application des relations IV(4) et IV(5).

3,1. Fonction de transfert-vitesse d'un résonateur série



Les équations du mouvement d'un tel système sont

IV(8)
$$\begin{cases} F = k\,(x_B - x_{A'}) \\ m\,\dfrac{dV_B}{dt} + C\,v_B = -F \end{cases}$$

on en déduit aisément, en régime sinusoïdal :

IV(9)
$$\begin{cases} v_B = \dfrac{k}{-m\omega^2 + j\omega c + k}\, v_{A'} \\ Z_{A'A'} = \dfrac{F}{v_{A'}} = \dfrac{k}{j\omega}\,\dfrac{m\omega^2 - j\omega c}{-m\omega^2 + j\omega c + k} \\ Z_{A'B} = \dfrac{F}{v_C} = \dfrac{m\omega^2 - j\omega c}{j\omega} \end{cases}$$

soit, en posant :

$$k/m = \omega_o^2 \qquad c/m = 2\alpha_o\omega_o \;,$$

$$\begin{cases} G_{A'A'} = \dfrac{j\omega}{k}\,\dfrac{-\omega^2 + 2j\alpha_o\omega_o\omega + \omega_o^2}{\omega^2 - 2j\alpha_o\omega_o\omega} \\ G_{A'B} = \dfrac{j\omega}{k}\,\dfrac{\omega_o^2}{\omega^2 - 2j\alpha_o\omega_o\omega} \end{cases}$$

3,2. Spectre de la puissance transmise et niveau global

On peut alors appliquer IV(4) après avoir posé :

IV(11) $$G_{AA} = -G = -\frac{2\alpha_c}{m\,\omega_o}$$

il vient alors :

$$G_{AA} + G_{A'A'} = \frac{1}{k}\,\frac{-\omega_o\,\omega^2(2\alpha_o + 2\alpha_c) + j\omega\left(\omega_o - \omega^2 + 4\alpha_o\alpha_c\,\omega_o^2\right)}{\omega^2 - 2j\,\alpha_o\,\omega_o\,\omega}$$

et, finalement :

$$\frac{G_{A'B}}{G_{AA} + G_{A'A'}} = \frac{\omega_o^2}{-\omega^2 + 2j\,\omega\,\omega_o\left(\alpha_o + \alpha_c\right) + \omega_o^2\left(1 + 4\,\alpha_o\,\alpha_c\right)}$$

et la densité spectrale de puissance de la réponse du système s'écrit donc, d'après IV(4) :

IV(12) $$\boxed{\phi_{v_B}(f) = \frac{\omega_o^4}{\left|-\omega^2 + 2j\,\omega\,\omega_o\left(\alpha_o + \alpha_c\right) + \omega_o^2\left(1 + 4\,\alpha_o\,\alpha_c\right)\right|^2}\,\tilde{\phi}_v(f)}$$

On peut maintenant calculer la valeur quadratique moyenne de la réponse en appliquant IV(5). Pour pouvoir en donner un résultat explicite, nous ferons l'hypothèse que α_c est petit et approximativement constant quand la fréquence évolue dans une bande centrée à la fréquence f_o du mode de Σ_1 . Compte tenu de IV(11) et de IV(6), on voit que cette hypothèse implique que la densité modale de Σ_o varie peu dans cette bande ou encore que l'amortissement α_o du résonateur soit assez petit. Dans ces conditions, en négligeant $4\alpha_o\,\alpha_c$ devant l'unité, on peut écrire :

IV(13) $$\overline{v_B}^2 = \omega_o^4 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\phi}_v(f)}{\omega_o^2 - \omega^2 + 2j\,\omega\,\omega_o\left(\alpha_o + \alpha_c\right)}\,df$$

Alors, si $\phi_v(f)$ possède un spectre de bande idéal de largeur B centré à la fréquence fo, ceci donne approximativement :

$$\overline{v_B}^2 = \omega_o^4\,\frac{1}{4\left(\alpha_o + \alpha_c\right)\omega_o^3}\,\phi_{v_o}$$

avec $\phi_{v_o} = \dfrac{\overline{v}^2}{2B}$, $\overline{v}^2$ étant la valeur quadratique moyenne de la vitesse v sur Σ_o . On a donc en définitive :

IV(14) $$\boxed{\overline{v_B}^2 = \frac{\omega_o}{8\left(\alpha_o + \alpha_c\right)}\,\frac{\overline{v}^2}{B}}$$

Si on suppose Σ_1 sans amortissement, il vient immédiatement compte tenu de IV(11) et IV(6) :

$$\overline{v_B}^2 = \frac{M_T\,\overline{v}^2}{m\,\bar{n}(f)\,B}$$

ce qui peut s'écrire

IV(15) $$\boxed{m \overline{V}_{V_B}^2 = \frac{M_T \overline{V}_V^2}{\bar{n}(f)\, B}}$$

Alors, comme $\bar{n}(f)\, B$ représente le nombre de modes de Σ_o compris dans la bande de fréquences de largeur B, on peut dire que **l'énergie transmise au système est égale à l'énergie moyenne de chacun des modes de Σ_o, si le système ne dissipe pas d'énergie.** Dans le cas contraire, on doit écrire :

IV(16) $$\boxed{m \overline{V}_{VB}^2 = \frac{M_T \overline{V}_V^2}{\bar{n}(f)\, B} \frac{\alpha_c}{\alpha_o + \alpha_c}}$$

ce qui exprime bien qu'une fraction de l'énergie vibratoire moyenne de chaque mode de Σ_o est transformée en énergie vibratoire de Σ_1, la différence étant dissipée dans Σ_1. Ces résultats sont identiques à ceux de *Smith* et *Lyon*.

3,3. Cas d'un système Σ_1 à plusieurs degrés de liberté

On obtient des résultats analogues en considérant le cas d'un système Σ_1, à plusieurs degrés de liberté, dans l'hypothèse où les fréquences propres sont assez éloignées entre elles. Dans une bande de fréquences englobant la fréquence propre f_i, on peut alors écrire, d'après IV(7) :

$$G_{A'A'} \simeq s_i^2(A')\, A_i(f)$$
$$G_{A'B} \simeq s_i(A')\, s_i(B)\, A_i(f)$$

et on en déduit :

IV(17) $$\frac{G_{A'B}}{G_{AA} + G_{A'A'}} = 2\alpha'_c\, \omega_i \frac{s_i(B)}{s_i(A')} \frac{j\omega}{\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\omega\omega_1(\alpha_i + \alpha'_c)}$$

après avoir posé :

IV(18) $$G_{AA} = \frac{s_i^2(A')}{2\alpha'_c \mu_i \omega_i}$$

ce qui permet d'exprimer aisément le spectre de puissance au point B.

Supposant à nouveau que α'_c est petit, c'est-à-dire d'après IV(18) pour des fréquences suffisamment élevées puisque G_{AA} ou $\bar{n}(f)$ augmentent en général avec la fréquence, on peut calculer la valeur quadratique moyenne de la réponse.

Pour $\alpha_i = 0$, on obtient

IV(19) $$\boxed{m_{iB} \overline{V}_{V_B}^2 = \frac{M_T \overline{V}_V^2}{\bar{n}(f)\, B}}$$

où $m_{iB} = \dfrac{\mu_i}{s_i^2(B)}$ représente la masse apparente du système vibrant suivant le mode i, vue du point B.

Dans le cas général, $\alpha_i \neq 0$ et on trouve :

IV(20) $$\boxed{m_{iB}\ \Gamma^2_{v_B} = \frac{M_T\ \Gamma_v^2}{\bar{n}(f)B}\ \frac{\alpha'_c}{\alpha_i + \alpha'_c}}$$

c'est-à-dire des résultats analogues à ceux du paragraphe précédent.

4. GÉNÉRALISATION AU CAS DE LIAISONS PONCTUELLES MULTIPLES

Considérons maintenant le cas où Σ_1 est relié à Σ_o en un certain nombre de points A_i ; $i = 1, 2, \ldots p$ Compte tenu des hypothèses de linéarité, le problème devient alors matriciel et, si l'on désigne par $|V|$ la colonne des vitesses $v(A_i)$ sur Σ_o en l'absence de toute liaison avec Σ_1 , un raisonnement analogue à celui du paragraphe 2,1 conduit à la relation :

IV(21) $$v_B = G_1(A', B)\left[G_1(A', A') + G_o(A, A)\right]^{-1} |V|$$

où v_B désigne toujours l'amplitude de la vitesse au point B de Σ_1 .

Alors $G_1(A', B)$, est une ligne dont les éléments $G_1(A'_i, B)$ désignent la fonction de transfert entre les points de liaison A'_i et le point B . $G_1(A', A')$ est une matrice carrée d'ordre p reliant la colonne des vitesses aux points d'entrée A'_i de Σ_1 à la colonne des forces appliquées en ces mêmes points. Enfin, $G_o(A, A)$ est également une matrice carrée reliant la colonne des vitesses aux points de contacts A_i de Σ_o à celle des forces qui s'y exercent : les termes diagonaux de cette matrice sont donc les admittances d'entrée en chacun de ces points, et les termes croisés expriment les fonctions de transfert entre les points de Σ_o communs à Σ_o et à Σ_1 . $G_o(A, A)$ est donc connue d'après les résultats du chapitre II.

Alors, en écrivant IV(21) sous la forme :

IV(22) $$v_B = [\lambda]|V|$$

où $[\lambda]$ est une matrice-ligne, d'éléments $\lambda_i(f)$, définie par :

IV(23) $$\lambda = G_1(A'_1, B)\left[G_1(A', A') + G_o(A', A)\right]^{-1}$$

le spectre de puissance de la vitesse au point B s'exprime par :

IV(24) $$\phi_{v_B}(f) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} |v_B|^2$$

ce qui donne, en développant IV(22)

IV(25) $$\phi_{v_B}(f) = \sum_{i,j=1}^{p} \lambda_i^*(f)\ \lambda_j(f) \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} v^*(A_i)\ v(A_j)$$

et le terme $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} v^*(A_i)\, v(A_j)$ n'est autre que la valeur de la corrélation instantanée de la vitesse sur Σ_o (en l'absence de Σ_1) **à la fréquence f**, c'est-à-dire le spectre croisé entre les points A_i et A_j, ou encore **la fonction de Green généralisée** $\widetilde{\varphi}(A_i, A_j, f)$ (si Σ_o est excitée en «bruit blanc»).

Alors IV(25), qui est une quantité réelle, se met sous la forme :

IV(26) $$\boxed{\phi_{V_B}(f) = \sum_{i,j=1}^{p} R_e\left(\lambda_i^* \lambda_j\right) \widetilde{\varphi}(A_i, A_j, f)}$$

qui généralise IV(4) pour un système à entrées multiples. **On peut alors,** grâce à l'expression II(72) pour $\widetilde{\varphi}(A_i, A_j, f)$ **résoudre complètement le problème du transfert à partir du modèle mathématique du champ réverbérant sur Σ_o.**

Ce résultat original devrait trouver de très nombreuses utilisations dans la pratique.

*

Chapitre V

CONTROLE EXPÉRIMENTAL

1. OBJET ET CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES

Le présent chapitre est consacré entièrement à l'exposé des résultats de l'étude expérimentale, à leur interprétation et à leur confrontation avec les prévisions de l'analyse théorique qui précède. Bien entendu, ce plan ne coïncide pas du tout avec le développement chronologique de l'étude, comme cela se produit fréquemment en physique. La mise en évidence de la notion de fonction de Green généralisée, et surtout de sa signification physique qui lui donnait un contenu expérimental très accessible, a permis d'entreprendre, à un stade précoce de ce travail, une série d'expériences sur structure réelle en vue de rechercher un modèle, éventuellement phénoménologique, susceptible de guider l'évolution ultérieure de l'étude. Compte tenu des moyens d'analyse rudimentaires qui pouvaient seuls être utilisés il y a quelques années dans le traitement des signaux aléatoires, une telle tentative eut été condamnée à court terme en raison des difficultés et surtout de la lenteur de sa mise en œuvre. En fait, l'apparition récente de moyens modernes et puissants, fonctionnant en temps réel, dans le domaine de l'analyse spectrale ou temporelle des signaux, a permis de poser en termes nouveaux le problème de la faisabilité d'une telle recherche expérimentale. L'acquisition et le classement des résultats de l'analyse, dans un grand nombre de configurations distinctes, devenait possible dans des délais réduits : on peut estimer que le gain de temps est probablement supérieur à 500.

Les expériences réalisées sur un cylindre circulaire mince, pour des raisons sur lesquelles nous reviendrons, ont ainsi permis de proche en proche la mise en forme du problème sur le plan théorique et sa solution en termes de modèle mathématique telle que nous l'avons exposée au cours des chapitres précédents. Nous nous proposons donc maintenant, en suivant le chemin inverse, de montrer que le calcul de la densité modale d'une structure et de sa fonction de Green généralisée, représentent bien, malgré quelques hypothèses simplificatrices, les caractéristiques globales réelles de la structure étudiée. Enfin, nous montrerons que, moyennant un modèle de dissipation convenable, également global, il est possible d'utiliser ces caractéristiques dynamiques pour prévoir les réponses moyennes de la structure lorsqu'elle est soumise à des excitations aléatoires quelconques.

2. CHOIX ET DÉFINITION DE LA STRUCTURE

2,1. Choix d'un élément cylindrique circulaire mince

Comme nous l'avons dit au début de ce document, l'application de nos résultats à des véhicules spatiaux constituait une incitation privilégiée. De ce point de vue, il était donc souhaitable de choisir un élément de structure-type dans ce genre de constructions, c'est-à-dire un élément de plaque ou de coque mince.

L'exemple du panneau plan, souvent choisi dans la littérature en raison de sa simplicité, n'a pas été retenu pour cette raison même. En outre, comme nous l'avons montré dans le chapitre consacré aux applications, l'impédance d'entrée d'une plaque mince est sensiblement inférieure, aux fréquences usuelles, à celle d'un panneau cylindrique de mêmes dimensions ; il en résulte une plus grande sensibilité de la réponse (sous une excitation ponctuelle) à la masse parasite introduite par l'excitateur.

C'est donc en définitive le cas d'un cylindre circulaire homogène, à parois minces, qui a été retenu. Dans le cadre de la théorie de Love, nous avons vu que les approximations de Donell conduisaient à une formulation mathématique du problème en termes suffisamment maniables pour permettre le calcul explicite des caractéristiques dynamiques globales du cylindre. D'autre part, dans le cas de conditions aux limites de simple appui, le calcul des modes propres et sa confirmation expérimentale, proposés par *G. Coupry* [18] fournissait un guide pour l'interprétation des résultats des essais de base.

2,2. Le cylindre d'essai

Le cylindre d'essai est en acier inoxydable et possède les caractéristiques suivantes :

Longueur $L_{ox} = 1$ m	Module d'Young $E = 2\ 10^{11}$ N/ m^2
Rayon a = 0,3 m	Coefficient de Poisson $\nu = 0{,}29$
Epaisseur $h = 10^{-3}$m	Masse spécifique $\rho = 7900$ kg/ m^3

Il est monté en ses extrémités sur deux couronnes d'acier rigides avec liaison assurée par vis. On peut estimer que ce type de conditions aux limites constitue un cas intermédiaire entre l'encastrement parfait et l'appui simple. Toutefois, le calcul des fréquences propres effectué sous cette dernière hypothèse sera bien confirmé par l'expérience pour quelques modes aisément identifiables. La figure 1 permet de voir que la paroi externe a été munie d'un maillage permettant le repérage des points de mesure. Onze génératrices d'écart angulaire constant (30°), numérotées G_1 à G_{11}, et sept niveaux correspondant aux sections droites du cylindre et équidistants par rapport au niveau central, numérotés de haut en bas N_1 à N_7 permettent de définir la position $G_i\ N_j$ des points de mesure ou d'essai.

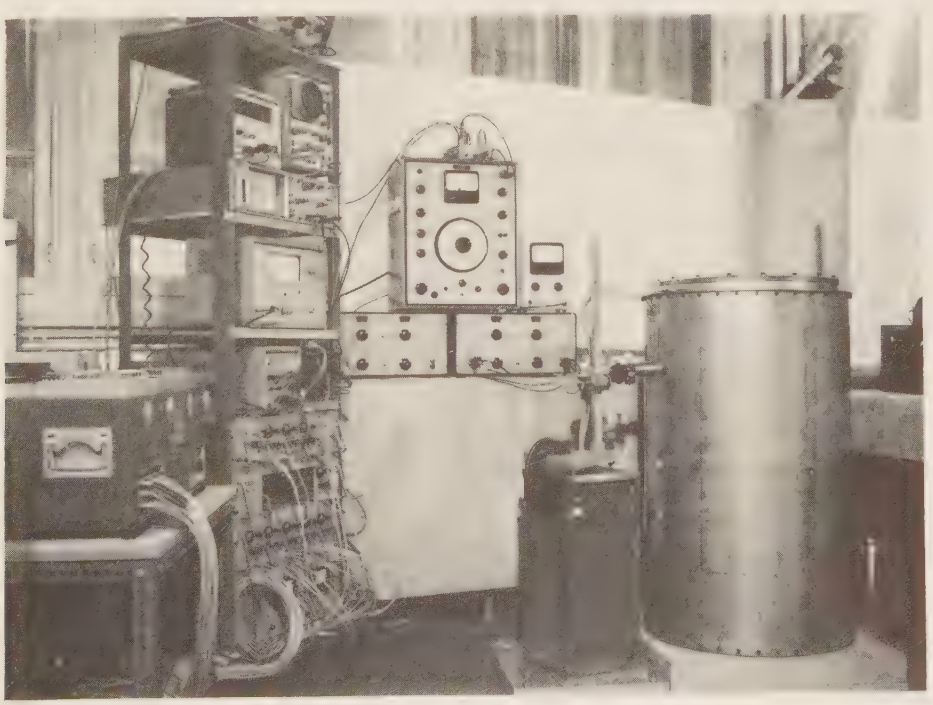


Fig. 1 - Montage d'essai et appareillage de mesure.

Mentionnons enfin que le cylindre de mesure est monté concentriquement à un cylindre interne très rigide (sans contact avec lui). Ce cylindre interne sert de bâti fixe et supporte les circuits magnétiques de capteurs de vitesse dont la bobine mobile est liée à la structure déformable externe (fig. 2).

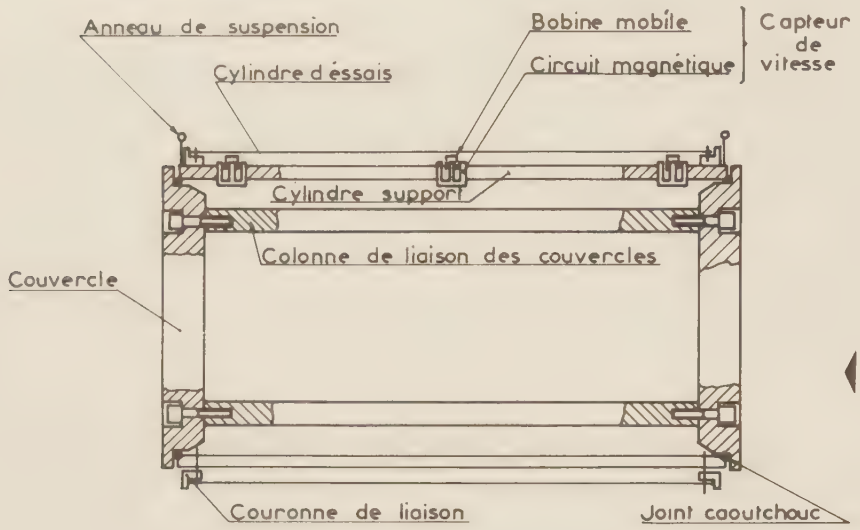


Fig. 2 - Schéma de montage du cylindre.

2,3. Equipement de la structure - Moyens de mesure

2,3.1. Capteurs de vitesse

Le paramètre de réponse choisi dans la partie expérimentale est la vitesse radiale du mouvement. Pourtant, cela n'explique pas complètement le choix de capteurs de vitesse pour les mesures. En réalité, ceux-ci ont été préférés à des capteurs d'accélération, d'un emploi plus aisé en apparence dans ce type de problème, pour des raisons de masse ou plus précisément parce que, pour une masse donnée de l'élément attaché à la structure, les capteurs de vitesse choisis délivraient une tension notable rendant inutile l'introduction de chaîne électronique intermédiaire.

La figure 3 donne le schéma d'un capteur de vitesse dit «à entrefer large». La bobine mobile en acier inoxydable possède une masse de 3 grammes. Elle est fixée au cylindre à l'aide de vis très petites. Une étude préalable du comportement de ce capteur dans la gamme des fréquences les plus élevées atteintes dans cette étude a été réalisée en confrontant sa réponse à celle d'un accéléromètre de référence fixé au même point. Aucune distorsion ou perte de linéarité n'a été observée, ce qui indique que les fréquences de travail étaient très inférieures aux fréquences des premiers modes de déformation de la bobine.

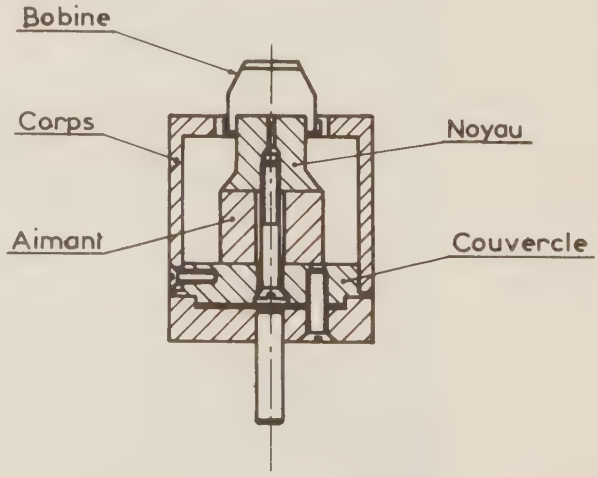


Fig. 3 - Capteur de vitesse.

La sensibilité moyenne des capteurs utilisés était de 10 Volts/ m/ s.

2,3.2. Excitateurs

Ils sont du même type que les capteurs de vitesse, c'est-à-dire électrodynamiques. Le circuit magnétique fixe est solidaire d'un bâti extérieur totalement découplé par rapport au dispositif en essai. La masse de la bobine mobile de l'excitateur est de 7,5 grammes. Dans certains cas, il conviendra d'en tenir compte pour corriger les résultats obtenus (cf. mesure de la densité modale au moyen de la répartition spectrale de la puissance fournie).

L'excitateur est attaqué par le courant de sortie d'un amplificateur de puissance piloté par le signal aléatoire d'un générateur de bruit de type Bruel et Kjaër. La référence force est obtenue par mesure du courant circulant dans l'enroulement de la bobine.

2,4. Aperçu des caractéristiques modales du cylindre

Nous indiquons ici les principaux résultats obtenus à l'aide de la théorie simplifiée classique des vibrations libres du cylindre en flexion. Les conditions aux limites choisies sont celles de simple appui sur les bords, ce qui constitue, comme le montre l'expérience dans notre cas, une approximation satisfaisante des conditions réelles. Alors, le mouvement possède une composante radiale prépondérante $w(x,\theta)$ et les solutions libres s'expriment sous la forme :

V(1) $$w_{mn}(x,\theta) = W_{mn} \sin\frac{m\pi x}{L_{ox}} \cos n\theta$$

m et n étant des entiers indiquant respectivement le nombre de demi-ondes suivant l'axe longitudinal, et le nombre d'ondes suivant une circonférence du cylindre. En posant :

V(2) $$\begin{cases} k_{mx} = \dfrac{m\pi}{L_{ox}} \\ k_{ny} = \dfrac{n\pi}{L_{oy}} \end{cases}$$

où $L_{oy} = \pi a$, on peut obtenir, grâce à III(31a), l'expression approchée des fréquences propres :

V(3) $$f_{m,n} = \frac{c_L}{2\pi a}\left[\frac{(1-\nu^2)\,k_{mx}^4}{(k_{mx}^2+k_{ny}^2)^2} + \beta a^4 (k_{mx}^2+k_{ny}^2)^2\right]^{1/2}$$

avec $c_L^2 = \dfrac{E}{\rho(1-\nu^2)}$, et $\beta = \dfrac{h^2}{12a^2}$ dont les courbes d'évolution, à m constant sont données figure 4.

Comme nous l'avons montré au chapitre III, ces courbes présentent un minimum lorsque, à m constant, k_{xy} vérifie l'équation :

$$(k_{mx} - k_R)^2 + k_{ny}^2 = k_R^2$$

Le lieu des minima dans la représentation de la figure 4 est alors un quart d'ellipse dont le grand axe coïncide avec celui des fréquences et d'équation :

V(4) $$\frac{(\omega - \omega_a/\sqrt{2})^2}{\frac{\omega_a^2}{2}} + \frac{k_{ny}^2}{k_R^2} = 1$$

où $f_a = \frac{\omega_a}{2\pi}$ est la fréquence d'anneau donnée par III,32 soit :

V(5) $$f_a = \frac{1}{2\pi a}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

L'observation de la figure 4, et celle de la figure 5 qui montre l'évolution du module de la réponse vitesse en un point du cylindre au cours d'un balayage en fréquence avec une excitation d'amplitude constante, permettent de constater que, même aux fréquences relativement basses, la structure présente un grand nombre de modes souvent très voisins en fréquence.

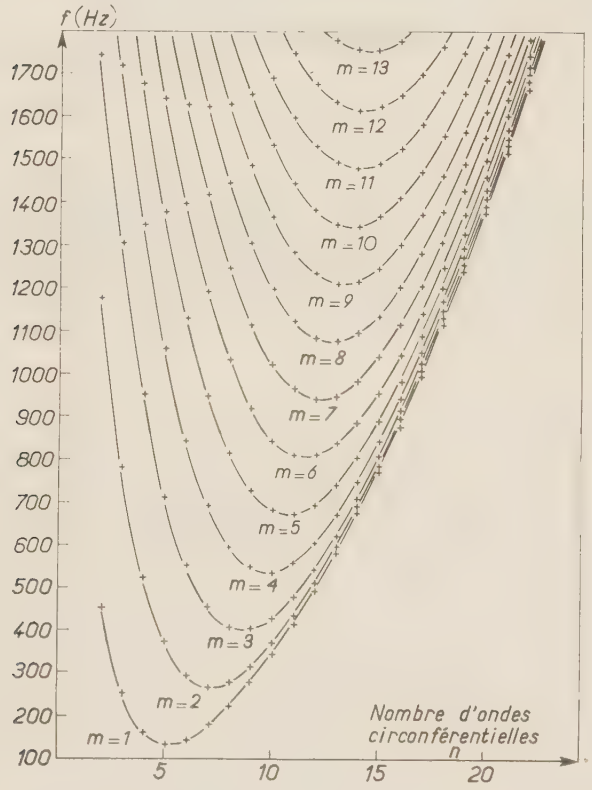
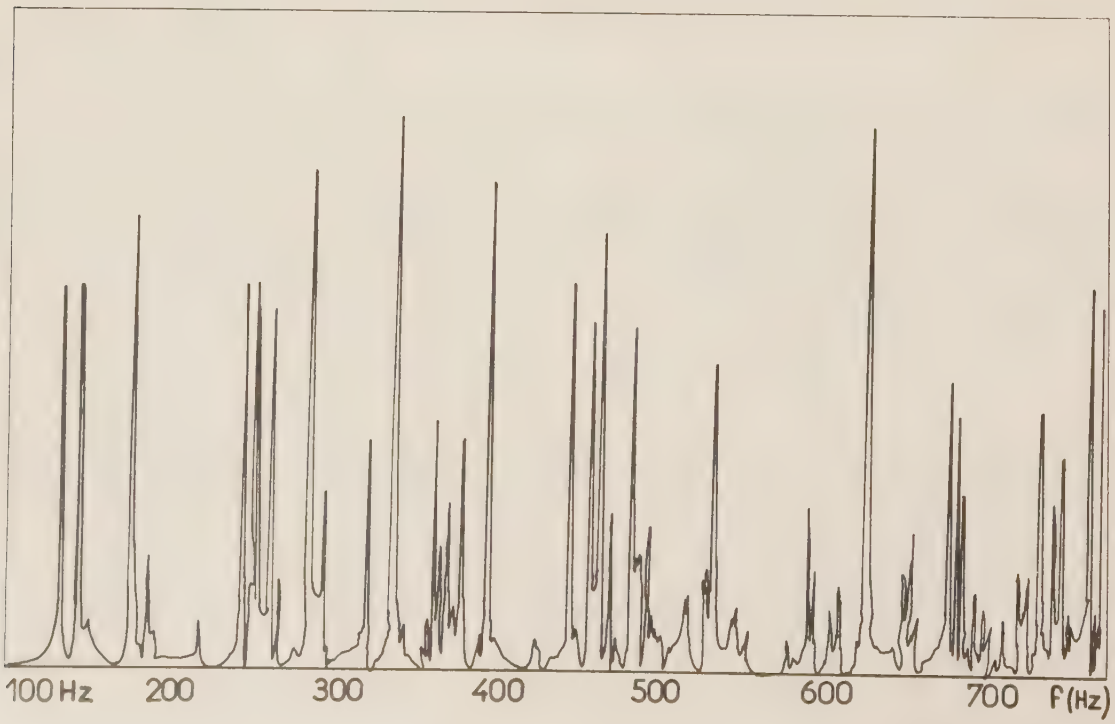


Fig. 4 - Fréquences propres théoriques

Fig. 5 - Réponse vitesse en un point au cours d'un balayage en fréquence.



On montre immédiatement, en utilisant l'expression V(1) de la forme propre, que la masse généralisée de chaque mode est constante quels que soient m et n et, dans l'approximation de la présente théorie, on a :

$$\mu = \frac{M_T}{4} \qquad (W_{mn} = 1\,m),$$

si M_T désigne la masse totale du cylindre.

3. LES MOYENS D'ANALYSE SPECTRALE ET TEMPORELLE

3,1. Caractéristiques générales

La plupart des résultats d'analyse spectrale ou temporelle qui vont être présentés ont été obtenus dans les laboratoires de l'ONERA au moyen d'un système multiprocesseur UPS6 Federal Scientific associé à un calculateur numérique CII type 10020. Cet ensemble permet le traitement simultané de deux signaux analogiques aléatoires et délivre, **en temps réel**, ou bien les densités spectrales de puissance directes et croisée (réelle et imaginaire) -soit quatre spectres simultanément- ou bien la fonction d'auto ou d'intercorrélation des deux entrées. La définition de ces grandeurs est obtenue en 500 points équidistants c'est-à-dire que l'analyse spectrale réalisée est équivalente aux passages successifs du signal d'entrée dans 500 filtres sélectifs élémentaires contigus et de même largeur de bande B. Si on désigne par F_{max} la fréquence maximum à analyser (10 gammes standard du système UPS6 permettent de faire évoluer F_{max} entre 10 Hz et 40 000 Hz), la largeur de bande nominale correspondante est donc $B = \frac{F_{max}}{500}$. Réciproquement, l'analyse temporelle des signaux d'entrée par corrélation est effectuée en 500 points avec un retard compris entre $-\tau_{max}$ et $+\tau_{max}$, où $\tau_{max} = \frac{1}{4B}$. L'incrément temporel est donc égal à la moitié de l'inverse de la fréquence maximum à analyser. On peut donner une idée de la puissance de traitement de ce système en disant qu'il réalise, grâce à des techniques hybrides, l'équivalent du calcul de 40 000 transformations de Fourier par seconde.

3,2. Principes de base

Les principes de base du fonctionnement de l'ensemble d'analyse Federal Scientific peuvent se résumer de la façon suivante :

a) Chaque signal à analyser est échantillonné et numérisé à une fréquence triple de F_{max}, puis continûment stocké dans une mémoire circulante contenant 1500 «mots» ou images binaires de l'amplitude du signal d'entrée : celui-ci est donc découpé en tronçons dont la durée dépend de la cadence d'échantillonnage. Le contenu de la mémoire est progressivement régénéré par l'arrivée de nouvelles informations se substituant aux anciennes, comme si on était en présence d'un enregistreur magnétique à boucle.

b) Le contenu de la mémoire est «relu» entièrement en 100 μs, ce qui équivaut à une **compression de temps** ou, réciproquement, à une **dilatation spectrale.** Quelle que soit la bande passante du signal d'entrée, ce mécanisme permet donc d'effectuer le traitement ultérieur dans une bande spectrale unique comprise entre 0 et 5 mégahertz (500 périodes d'un signal de fréquence F_{max} étant relues en 100 μs).

c) Après transformation du signal accéléré binaire en un signal accéléré analogique, le filtrage est obtenu par multiplication de fréquence et passage dans un filtre sélectif unique très stable, de largeur de bande 10 kHz. A chaque révolution complète du signal stocké dans la mémoire circulante, l'oscillateur local délivre une

tension dont la fréquence est incrémentée de 10 kHz. En 500 révolutions, c'est-à-dire en 50 ms, la gamme 0-5 MHz a donc été totalement explorée et 500 valeurs de spectre ont été obtenues : ces valeurs correspondent donc à l'analyse de la gamme originale 0- F_{max} en 500 points, au cours d'une opération qui a duré 50 ms. Alors, comme ce délai est en général inférieur (ou égal, dans la gamme 10 kHz) à la durée de remplissage de la mémoire, l'analyse spectrale peut être réalisée en continu, sur autant de tronçons successifs qu'il est nécessaire pour obtenir une estimation convenable des grandeurs spectrales.

3,3. Intégration des résultats partiels - Sortie et traitement des résultats de l'analyse

Dans le mode de fonctionnement en analyse spectrale, nous avons dit que quatre spectres étaient simultanément disponibles en sortie de l'UPS6, c'est-à-dire 2000 informations toutes les 50 ms, présentées sous forme analogique. Après numérisation à l'aide d'une batterie de quatre convertisseurs analogique-numérique, ces informations élémentaires sont rangées en mémoire centrale de l'ordinateur 10020 sous forme de quatre tableaux. A chaque nouvelle arrivée d'informations en provenance de l'UPS6, un additionneur externe à l'ordinateur va successivement chercher en mémoire l'information stockée au préalable, lui ajoute la nouvelle valeur et range à nouveau le résultat à la même adresse. Ce cycle est donc répété 2000 fois pour acquérir l'ensemble des données. Au bout de N séquences, correspondant à une durée totale d'analyse égale à $N T_o$ (où T_o est la durée de remplissage de la mémoire circulante et où N est choisi par l'expérimentateur par un dialogue d'initialisation avec l'ordinateur) le processus est achevé et la valeur moyenne des grandeurs analysées est automatiquement visualisée sur une console oscillographique. Ensuite, sur option de l'opérateur, les résultats peuvent être stockés sur ruban magnétique numérique, tracés sur papier, ou faire l'objet d'un traitement direct sur ordinateur (lissages, calculs de fonctions de transfert, de coefficients de cohérence, etc...) à l'aide de programmes spécialisés.

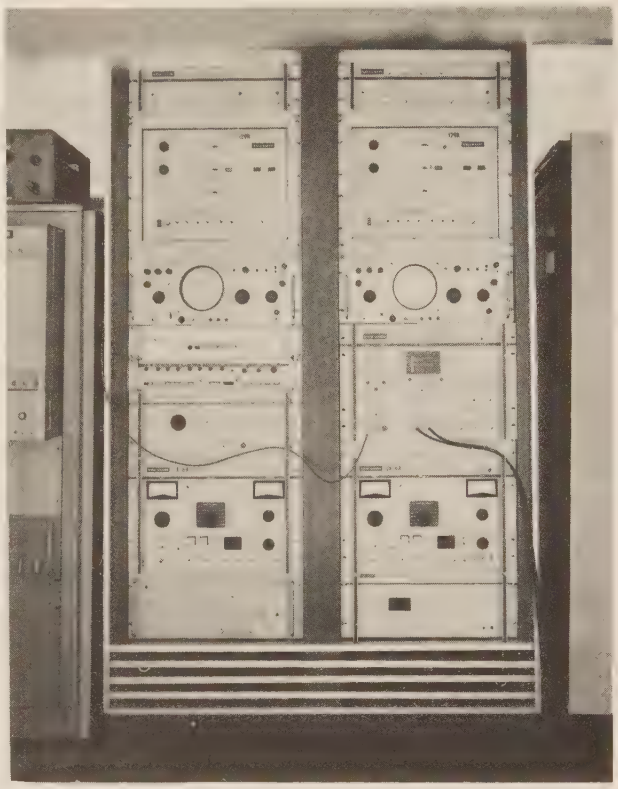


Fig. 6 - Analyseur à deux voies Federal Scientific.

Fig. 7 - Vue d'ensemble du laboratoi d'analyse.

L'ensemble de ces moyens (fig. 6 et 7), ainsi que la conception générale du système « software » d'exploitation, mis au point sous la responsabilité de l'auteur, ont permis d'obtenir rapidement les résultats essentiels nécessaires à la confrontation entre théorie et expérience que nous allons présenter maintenant.

4. APPLICATION DE LA MÉTHODE GLOBALE A L'ÉTUDE EXPÉRIMENTALE D'UN CYLINDRE

Nous passerons successivement en revue les résultats concernant la détermination expérimentale de la densité modale d'un cylindre à l'aide de celle de son admittance d'entrée, puis les résultats relatifs à la mesure de la fonction de Green généralisée. Nous vérifierons que les hypothèses du calcul présenté au chapitre II sont satisfaites et que le modèle théorique proposé représente convenablement le comportement réel de la structure. La gamme spectrale explorée dans cette étude est 0-2000 Hz.

4,1. Détermination de la densité modale au moyen de la mesure de l'admittance d'entrée

4,1.1. Principe de l'analyse

Nous avons vu au chapitre I (expressions 12bis et 14) que la puissance totale moyenne délivrée à une structure par une force ponctuelle appliquée en M dont le spectre de puissance est $S_{FF}(f)$ pouvait s'écrire :

$$\Gamma_{FV}(M,0) = 2\int_0^{\infty} R_e\left[G_{V_{fini}}(M,f)\right] S_{FF}(f)\, df$$

En particulier, si la force possède un spectre de bande idéal centré à la fréquence f , avec la largeur B , cette puissance totale vaut :

V(6) $$P_f(M) = \frac{2}{B}\int_{f-\frac{B}{2}}^{f+\frac{B}{2}} R_e\left[G_{V_{fini}}(M,\gamma)\right] d\gamma \,.\, B.\, S_{FF}$$

où $B\,S_{FF} = \overline{V_f^2}(f)$ représente la valeur quadratique moyenne du signal force, filtré dans la bande de largeur B .

L'opération réalisée pour déterminer la quantité $P_f(M)$ peut alors être schématisée de la manière suivante :

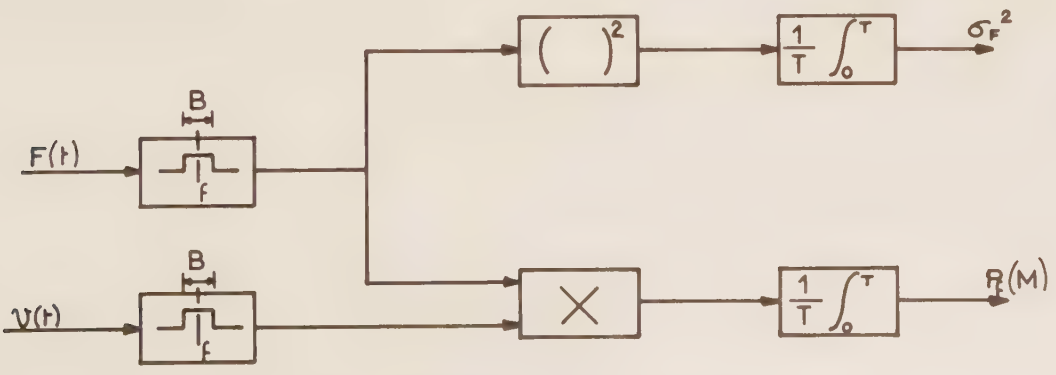


Fig. 8 - Schéma de principe de l'analyse.

Les sorties filtrées des signaux force et vitesse sont multipliées, puis un moyenneur délivre la valeur de la puissance moyenne dans la bande de fréquences considérée. D'autre part, un circuit quadratique suivi d'un moyenneur fournissent la valeur quadratique moyenne du signal force, après filtrage. D'après la dernière relation V(6), on obtient donc :

$$V(7) \qquad \frac{P_f(M)}{\overline{\nabla_F^2}} = 2\,\widetilde{G}_{V\,fini}(M,f)$$

puisque $\widetilde{G}_{V\,fini} = R_e\left[G_{V\,fini}\right]$, comme il a été montré au chapitre II. Alors V(7) représente la partie réelle de la fonction de transfert entre force et vitesse, maintenant limité aux fréquences positives. L'appareillage fournit directement $P_f(M)$ et $\overline{\nabla_F^2}$, puis un programme de calcul donne immédiatement leur rapport pour toutes les valeurs de la fréquence jusqu'à 2000 Hz. On doit vérifier II(47), soit :

$$V(8) \qquad \left\langle \frac{P_f(M)}{\overline{\nabla_F^2}} \right\rangle = \frac{\overline{n}(f)}{2M_T}$$

à partir de mesures réalisées en modifiant la position du point d'excitation.

4,1.2. Résultats

Les figures 9 à 12 présentent, à titre d'exemple, quelques uns des résultats bruts de l'analyse, obtenus dans des configurations de filtrage différentes.

La figure 9 montre l'évolution de l'admittance d'entrée moyenne du cylindre au point d'excitation repéré G_3N_2. L'analyse est effectuée pendant 10 secondes, la largeur de bande effective de filtrage (bande passante énergétique équivalente de l'analyseur*) étant de 64 Hz.

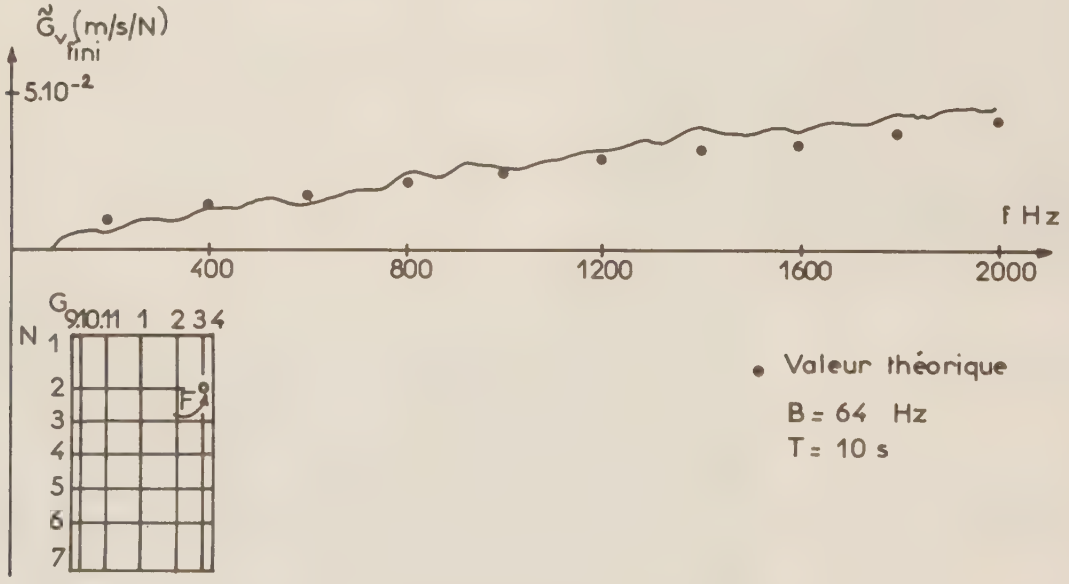


Fig. 9 - Admittance d'entrée du cylindre (point G_3N_2).

---

* *C'est-à-dire la bande passante d'un* **filtre rectangulaire idéal** *qui, attaqué par un signal de spectre blanc, fournirait un signal de même puissance que le filtre réel.*

On présente figure 10 le résultat obtenu au point d'excitation G_3N_4 pour un échantillon de même durée (10 secondes), mais avec une fenêtre spectrale dix fois moindre (soit 6,4 Hz). Pour comparaison, la courbe relative au point précédent (G_3N_2) a été reportée à la même échelle sur le graphe : on observe que les valeurs moyennes des deux essais sont très sensiblement superposables. D'autres tentatives, non présentées ici, confirment cette observation : **l'admittance d'entrée moyenne (en fréquence) dépend peu du point où elle est mesurée.**

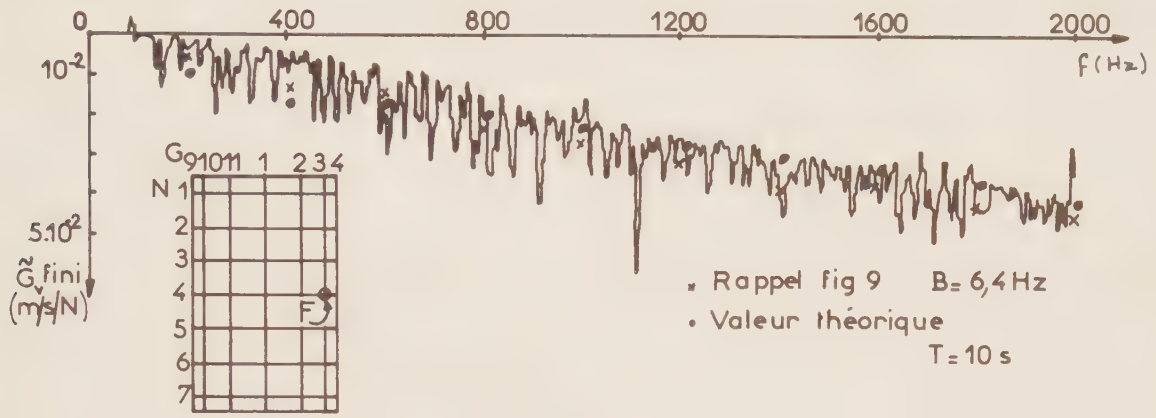
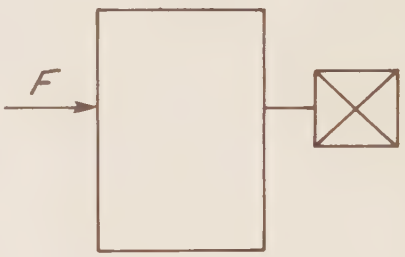


Fig. 10 - Admittance d'entrée du cylindre (point G_3N_4).

Ce résultat n'est pas sensiblement altéré si on introduit une singularité marquée dans la structure. En effet, la figure 11 est relative au cas où le cylindre a été **bloqué** en un point diamétralement opposé au point d'excitation (G_3N_2) par une liaison rigide avec une masse très importante. On n'observe pas de modification sensible de l'admittance d'entrée, autrement dit **à une distance suffisante** (qui n'a pas été déterminée mais qui est vraisemblablement assez faible) **l'influence de la perturbation ne se fait plus sentir sur l'admittance d'entrée moyenne.**



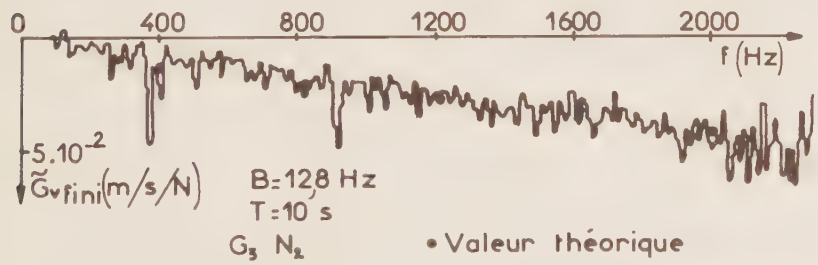


Fig. 11 - Admittance d'entrée du cylindre « bloqué ».

La présence d'un **revêtement amortisseur** (simple enroulement d'un panneau de polyuréthane fortement plaqué sur la paroi externe du cylindre) **ne joue aucun rôle** observable dans le résultat de la mesure, comme le montre la figure 12.

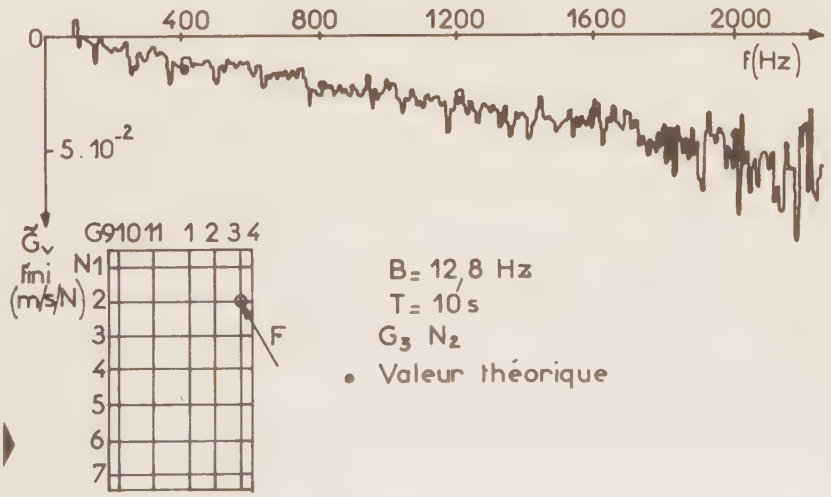


Fig. 12 - Admittance d'entrée du cylindre revêtu d'un matériau amortisseur.

4,1.3. Confrontation avec les résultats théoriques

La figure 13 présente les résultats du calcul de la densité modale du cylindre, à l'aide de la formule III(45). Pour comparaison, on a fait figurer également la distribution des fréquences propres obtenues dans l'étude modale du cylindre à extrémités simplement appuyées : en choissant une bande de fréquences de 100 Hz, on a dénombré les fréquences propres comprises entre f-50 et f+50, calculées grâce à V(3), ce qui fournit la courbe en escalier de la figure. On observe que III(45) donne une très bonne approximation de la valeur moyenne de la densité modale, alors que les résultats de Heckl sont nettement plus faibles.

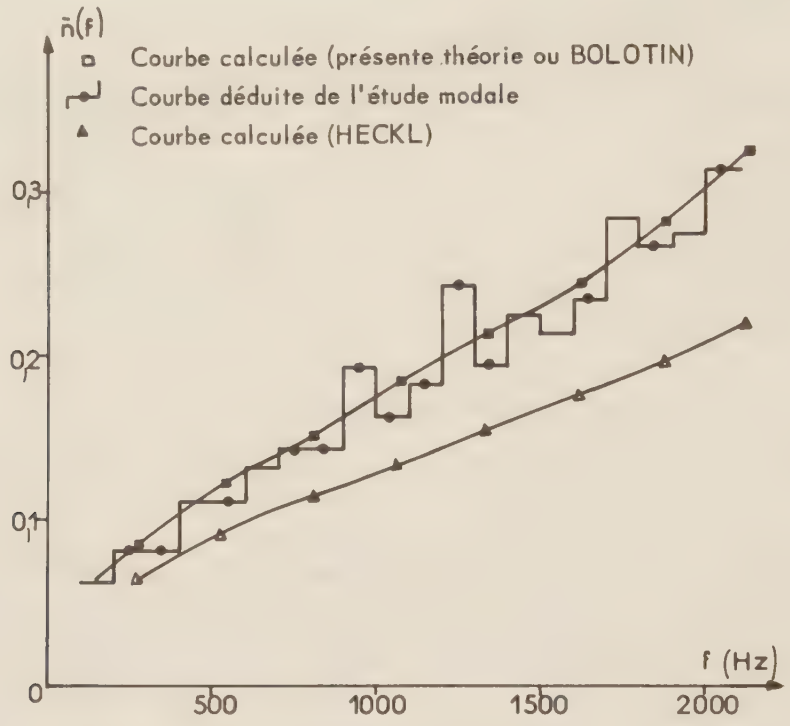


Fig. 13 - Densité modale du cylindre.

On a donc utilisé ces résultats pour la vérification de V(8). L'application directe de cette relation conduit à des valeurs quatre fois trop petites, c'est-à-dire que la quantité déduite de l'expérience est en réalité donnée par :

V(9) $$\frac{P_f(M)}{\overline{V}_F^2} = 2 \cdot \frac{\bar{n}(f)}{M_T}$$

où, comme nous l'avons montré précédemment, le rapport $\frac{P_f(M)}{\overline{V}_F^2}$ dépend peu du point M où s'applique l'excitation, ce qui semble indiquer que la mesure en un point représente une bonne estimation de la moyenne spatiale définie au premier membre de V(8).

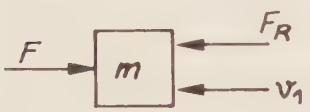
Il faut ici remarquer que la symétrie de révolution du cylindre joue un rôle essentiel. En effet, le choix des formes propres du type V(1) laisse indéterminée la référence angulaire à partir de laquelle on repère l'angle θ dans la décomposition en série de Fourier. On peut alors admettre que l'application d'une excitation en un point privilégie un plan et lui confère la propriété de référence angulaire $\theta = 0$. En déplaçant le point d'excitation sur une même circonférence, on mesure donc nécessairement toujours la même admittance d'entrée puisque la référence tourne en même temps. Il en résulte que la mesure exprime, non une moyenne de $\psi_{mn}^2(M)$ mais plutôt sa valeur crête qui lui est quatre fois supérieure.

Dans ces conditions, on peut dire que l'expérience confirme bien la prévision théorique telle que la définit V(3). Cette prévision est reportée sur les courbes présentées au paragraphe précédent.

4,1.4. Remarque : correction de masse due à l'excitateur et au capteur de mesure

Il est nécessaire de tenir compte du fait que l'introduction d'une force ponctuelle et la mesure de la vitesse au même point entrainent une perturbation locale de la structure, même si des précautions particulières ont été prises pour réduire cet effet au minimum. En effet, la mesure de la force, dans toutes nos expériences, a été obtenue indirectement par celle du **courant** parcourant l'enroulement lié à la structure. On doit alors tenir compte de l'impédance mécanique introduite localement par cette masse m .

En effet, on a immédiatement, en régime sinusoïdal



$$\begin{cases} F - F_R = m \dfrac{dv_1}{dt} = j\omega m v_1 \\ F_R = \dfrac{v_1}{G} \end{cases}$$

où F_R est la force de réaction du cylindre sur la masse et F la force appliquée à l'ensemble masse + structure.

On en déduit $$v_1 = \frac{G}{1 + j\omega m G} F$$

donc $$\boxed{G_{app} = \frac{G}{1 + j\omega m G}}$$

Par conséquent, si $m\omega G$ n'était pas négligeable devant 1, on commettrait une erreur importante en assimilant $\widetilde{G}_{app}$ à $\widetilde{G}$. On peut apprécier ce terme en considérant son effet sur un système à un degré de liberté. Alors

$$G = \frac{j\omega}{\mu_i \left(\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\alpha_i \omega_i \omega\right)}$$

soit $$j m \omega G = -\frac{m\omega^2}{\mu_i \left(\omega_i^2 - \omega^2 + 2j\alpha_i \omega_i \omega\right)}$$

Le module est maximum à la résonance et vaut $\frac{m}{2\alpha_i \mu_i}$. On devra donc avoir

$$\frac{m}{\mu_i} \ll 2\alpha_i$$

pour que la mesure de la valeur moyenne de G_{app} soit une bonne approximation de celle de G.

En prenant $\mu_i = \frac{M_T}{4}$, la masse ajoutée devra être très inférieure à $\frac{\alpha_i}{2} M_T$, soit, pour un système peu amorti (comme c'est le cas pour un cylindre ou une plaque en acier) $\alpha_i \sim 4\,‰$

$$m \ll 2 10^{-3} M_T$$

Dans notre cas, on a $M_T \simeq 15$ kg, donc $m \ll 30$ g. La condition est satisfaite ($m \sim 10$ g) mais on voit que c'est la limite extrême.

Par contre, une tentative réalisée sur un panneau plan en acier de dimensions $L_x = 0{,}80$ m, $L_y = 0{,}60$ m, $h = 10^{-3}$ m avec le même équipement de mesure a complètement échoué. Cela s'explique ici par le fait que M_T est de l'ordre de 4 kg ce qui impose

$$m \ll 8 g \quad ,$$

condition non remplie ($m \sim 10$ g) : les résultats de mesure sont alors tout à fait aberrants.

On voit donc que des précautions sévères doivent être prises dans ces mesures pour atteindre les grandeurs vraies : l'emploi d'une tête d'impédance est ici indispensable.

En définitive, il est prouvé :

- que la **mesure de l'admittance d'entrée** d'une structure, dans une bande de fréquences assez large pour englober plusieurs modes, **permet d'estimer correctement la valeur de la densité modale par voie expérimentale.** Dans le cas de **structures complexes,** difficiles à calculer, **ceci présente un intérêt pratique évident.**

- que la mesure de cette admittance d'entrée peut être faite en un petit nombre de points pour apprécier avec une précision suffisante la densité modale de la structure. On peut donc écrire, en première approximation

$$\widetilde{G}_{V_{fini}}(f) \simeq \frac{\bar{n}(f)}{4 M_T}$$

ce qui valide sur ce point le modèle mathématique proposé dans le chapitre II (expression II(71)).

4,2. Spectres de puissance - Modèle de dissipation

Nous allons maintenant nous intéresser aux termes directs de la fonction de Green généralisée du cylindre, c'est-à-dire simplement au **spectre de puissance** de la réponse vitesse en tout point, lors d'une excitation ponctuelle fixe, de spectre **blanc** égal à l'unité.

La figure 14 présente les résultats bruts d'une analyse-type. L'excitateur est placé au point G_3N_3 et les mesures sont faites aux points G_3N_2, G_3N_4, G_3N_6 et G_2N_3 avec une bande passante énergétique de 64 Hz et une durée d'analyse de 10 secondes. On a porté en ordonnées la racine carrée du spectre de puissance, c'est-à-dire que les unités sont portées en (m/ s/N) et ont par conséquent la dimension d'une admittance.

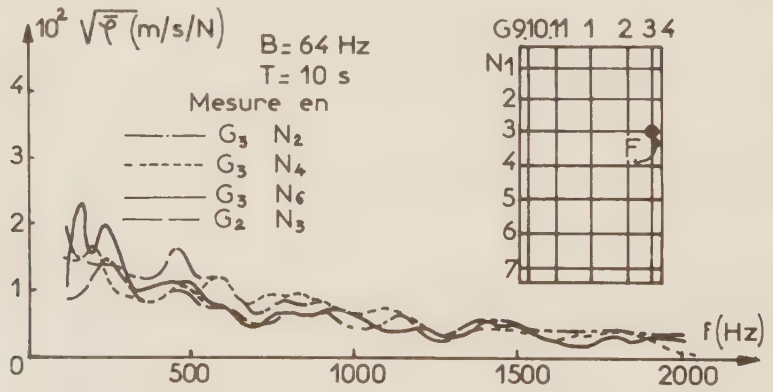


Fig. 14 - Spectre de puissance de la réponse mesurée.
Terme direct de la fonction de Green généralisée.

L'allure générale des courbes obtenues est la même si on déplace le point d'excitation. On observe sur la figure 14 que les variations de niveau d'un point à un autre de la structure sont peu importantes, et que les écarts deviennent insignifiants, compte tenu de la précision de l'analyse, lorsque la fréquence s'élève.

Il est donc légitime de rechercher une loi d'évolution moyenne, comme nous l'avons indiqué au chapitre II, qui représente une approximation convenable de ce qui se passe en tout point de la structure, en fonction de la fréquence. Nous avions montré que cette idéalisation pouvait s'exprimer par la relation :

II(73) $$\tilde{\varphi}(M,M,f) = \frac{\bar{n}(f)}{4M_T} K(f)$$

avec

II(74) $$K(f) = \frac{1}{2M_T \alpha \omega}$$

et, comme nous l'avons vu, $\frac{\bar{n}(f)}{4M_T}$ exprime la valeur de l'admittance d'entrée moyenne $G_{V\,fini}$

Il faut donc confronter ce modèle aux résultats de la figure 14. Comme $G_{V\,fini}$ est connu, nous devons choisir une loi d'évolution pour $K(f)$, c'est-à-dire en définitive pour l'amortissement réduit moyen

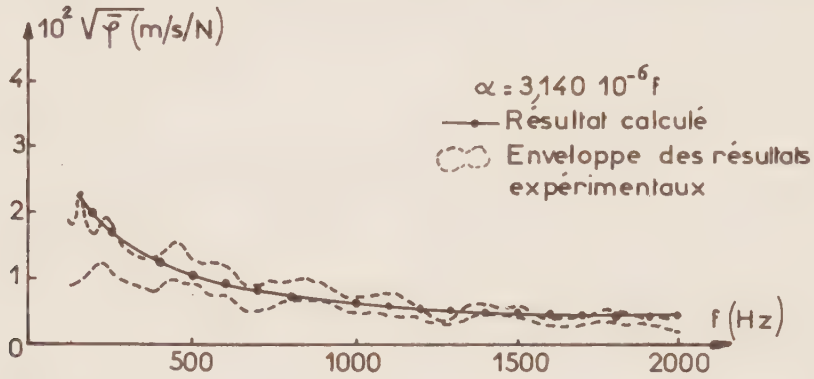


Fig. 15 - Spectre de puissance de la réponse calculée à l'aide du modèle de dissipation.

La figure 15 présente le résultat d'un calcul réalisé dans l'hypothèse où la structure dissipe l'énergie suivant une loi de type viscoélastique et vérifie également l'hypothèse de **Basile**. L'amortissement réduit moyen α est choisi proportionnel à la fréquence avec la valeur

$$\alpha \simeq 3{,}140\ 10^{-6} f$$

$K(f)$ décroît donc en $\frac{1}{f^2}$ quand f augmente.

La figure présente, pour comparaison, les courbes enveloppes des résultats de la figure 14. Le modèle de dissipation choisi semble donc suffisant pour les applications ultérieures.

4,3. Mesure de la fonction de Green généralisée du cylindre. Représentation dans le domaine spectral

4,3.1. Principe de la mesure

Nous avons affirmé au chapitre II que la fonction de Green généralisée moyenne (en fréquence) dépendait peu du point d'application de la force excitatrice et que l'on pouvait en obtenir une bonne approximation en introduisant le coefficient de corrélation spatiale instantané, à la fréquence f, de la structure réverbérante.

On a donc, d'après ce modèle :

II(72) $$\tilde{\varphi}(M,M',f) = \frac{\bar{n}(f)}{4M_T} K(f)\ \eta_0(M,M',f)$$

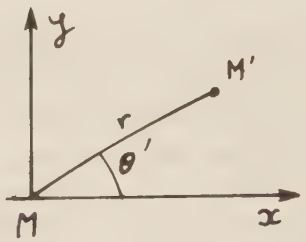
Comme nous connaissons $\bar{n}(f)$ et $K(f)$, il suffit maintenant de s'intéresser au seul coefficient

V(10) $$\eta_0(M,M',f) = \frac{\tilde{\varphi}(M,M',f)}{\left[\tilde{\varphi}(M,M,f)\ \tilde{\varphi}(M',M',f)\right]^{1/2}}$$

dont l'expression théorique a été donnée par II(69) dans le cas général et précisée dans le cas particulier du cylindre par l'expression déduite de III(50) :

$$V(11) \qquad \eta_0(M,M',f) = \frac{\displaystyle\int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} \frac{\cos\left[2k_a r \left(\gamma^2 - \cos^4\varphi\right)^{1/4} \cos\left(\varphi - \theta'\right)\right]}{\left(\gamma^2 - \cos^4\varphi\right)^{1/2}}\, d\varphi}{\displaystyle\int_{\varphi_0}^{\pi-\varphi_0} \frac{d\varphi}{\left(\gamma^2 - \cos^4\varphi\right)^{1/2}}}$$

où r et θ' désignent les coordonnées polaires du point M', le point M étant pris pour origine et la distance $|\overrightarrow{MM'}| = r$ étant mesurée sur la surface moyenne du cylindre. Nous partons donc de cette dernière formulation de η_0 pour en confronter le résultat avec les valeurs expérimentales déduites de la définition V(9).



4,3.2. Résultats - Confrontation théorie expérience

Les figures 16 à 18 présentent les résultats obtenus suivant **l'axe longitudinal** du cylindre (avec B = 64 Hz T = 10 s).

La figure 16 est relative à des mesures sur une même génératrice en des points appartenant à des niveaux immédiatement voisins ($G_3N_2 - G_3N_3$ par exemple). Deux courbes expérimentales sont présentées, à titre d'illustration de ce que l'on obtient en modifiant la position des points de mesure, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ étant maintenu constant en direction comme en grandeur : l'écart entre ces courbes donne une idée de l'écart entre le comportement réel de la structure et celui d'un milieu idéalement « réverbérant » défini par V(11) (ou tout au moins par une expression qui ne fait intervenir que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$, non la position particulière de ces deux points sur la structure : nous pourrions dire que cette situation traduit l'« homogénéité » de la fonction de Green généralisée dans l'espace).

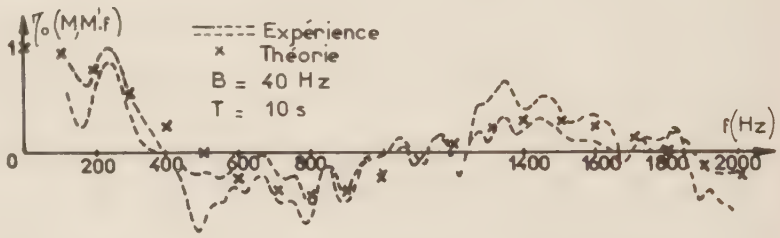


Fig. 16 - Mesure de la fonction de Green généralisée en des points d'une même génératrice (MM' = 0,160 m).

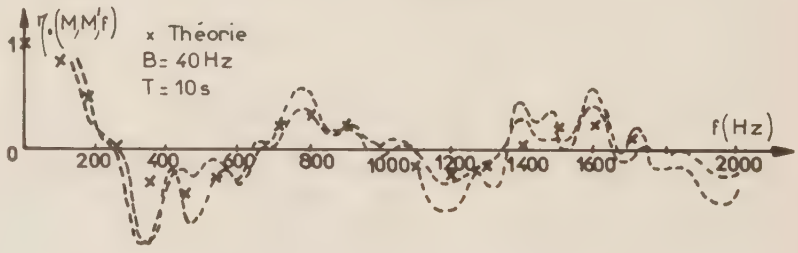


Fig. 17 - Mesure de la fonction de Green généralisée en des points d'une même génératrice (MM' = 0,284 m).

On déduit de ces observations que « l'hypothèse d'homogénéité » telle que nous l'entendons ici est assez bien représentative du cas réel. L'application de V(11), avec $r = 0{,}16$ m $\theta' = 0$ fournit les valeurs indiquées par des croix sur la figure 16, c'est-à-dire une fonction très voisine de la fonction de Bessel :

$$J_0\left(\frac{2\pi f r}{c_{x_0}}\right)$$

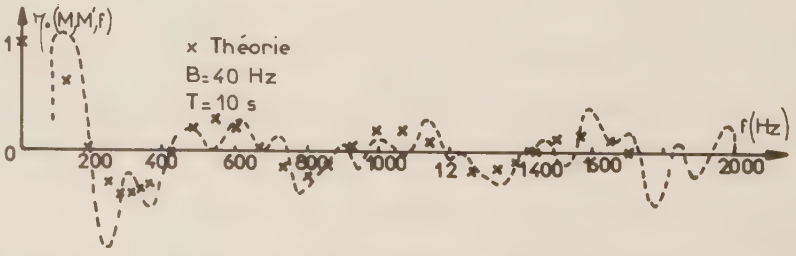


Fig. 18 - Mesure de la fonction de Green généralisée en des points d'une même génératrice (MM' = 0,426 m).

comme nous l'avions prévu en III(55). On a pris dans ce calcul $C_{x_o} = 209$ m/s, valeur légèrement inférieure à ce que donnent les coefficients élastiques et massiques de l'acier inoxydable utilisé. Il semblerait que le matériau soit donc légèrement différent de celui qui a fourni ces coefficients.

On constate donc que le modèle théorique fournit une bonne approximation du cas réel.

Cette appréciation est confirmée par les figures 17 et 18, obtenues en accroissant la distance des points de mesure, toujours sur une même génératrice. On observe toutefois que, lorsque la fréquence augmente, les oscillations deviennent plus notables autour de la valeur moyenne théorique, mais leur influence est faible puisque η est alors très inférieur à 1.

Les mesures suivantes ont été faites dans des **directions quelconques** de la surface du cylindre, c'est-à-dire en explorant successivement les nœuds du maillage autour d'un point pris comme référence. D'une manière générale, la dispersion des résultats est alors plus accentuée que dans le cas précédent, où les points de mesure étaient sur la même génératrice du cylindre. A titre d'exemple, on présente figure 19 le coefficient η_o obtenu en prenant pour référence le point G_3N_2 et en explorant les points de la génératrice voisine, aux deux niveaux voisins, soient G_2N_1 et G_2N_3. Outre cette dispersion, d'amplitude également variable d'un essai à l'autre (c'est-à-dire en recommençant la même expérience dans les mêmes conditions) on observe que le coefficient η_o est en général assez faible pour toutes les fréquences supérieures à 300 Hz. C'est d'ailleurs ce que confirme le calcul, dont les résultats, portés également sur la figure 19, indiquent bien la **tendance générale** du comportement réel de la structure tel qu'on a pu l'observer : on constate que $|\eta_o|$ est de l'ordre de 0,3 au maximum au delà de 300 Hz et qu'il devient négligeable au delà de 1300 Hz environ. Dans ces conditions, certaines causes de dispersion dans les résultats expérimentaux peuvent également avoir leur explication au niveau de l'appareillage d'analyse : la mesure de faibles coefficients de corrélation mutuelle est en effet entachée d'une erreur plus forte que celle des forts coefficients.

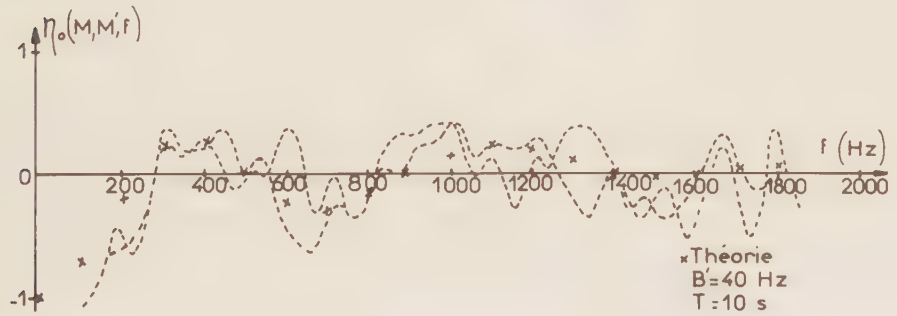


Fig. 19 - Mesure de la fonction de Green généralisée. (couples G_3N_2-G_2N_3 ou G_3N_2 - G_2N_1)

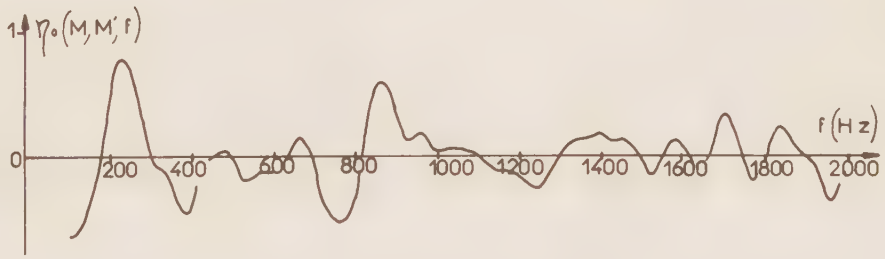


Fig. 20 - Mesure de la fonction de Green généralisée. (couple G_3N_2 - G_2N_5)

La figure 20, qui termine cette série consacrée à la représentation spectrale de la fonction de Green, présente un résultat typique pour des points de mesure assez éloignés ($G_3N_2 - G_2N_5$). Hormis au voisinage de 200 et de 800 Hz, le coefficient η_o est petit : d'une **manière générale**, on peut dire que le coefficient de corrélation $\eta_o(M, M', f)$ décroît quand $|\overrightarrow{M} - \overrightarrow{M'}|$ augmente et pourra être négligé au delà d'une certaine distance.

4,4. Mesure de la fonction de Green généralisée du cylindre. Représentation dans le domaine temporel

4,4.1. Principe de la mesure

Sous l'action d'une force aléatoire de spectre $S_{FF}(f)$ (théoriquement uniforme), le spectre croisé de la réponse aux points M et M' s'écrit $S_{FF}(f)\ \tilde{\varphi}(M,M',f)$. Alors, comme ceci est réel, la fonction d'intercorrélation de la réponse-vitesse en ces deux points a pour expression :

V(12) $$\Gamma(M,M',\tau) = R_e\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{FF}(f)\ \tilde{\varphi}(M,M',f)\ \exp j2\pi f\tau\ df\right\}$$

La mesure de $\Gamma(M,M',\tau)$ contient donc la même information que la mesure de $\tilde{\varphi}$. Pourtant, il est intéressant de s'y attacher pour mieux comprendre ce qui se passe sur cette structure quand elle est le siège d'un champ vibratoire de type réverbérant.

Pour cela, nous présentons dans ce qui suit l'évolution du coefficient de corrélation spatio-temporelle, défini par :

V(13) $$\gamma(M,M',\tau) = \frac{\Gamma(M,M',\tau)}{\left[\Gamma(M,M,0)\ \Gamma(M',M',0)\right]^{1/2}}$$

dont nous avons donné l'allure générale théorique dans le chapitre III, pour le cas du cylindre. Comme $\tilde{\varphi}(M,M',f)$ est réelle, on doit obtenir pour γ une fonction paire de τ . Cette fonction doit être également peu variée par translation du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ sur la surface moyenne du cylindre, en raison du caractère homogène de notre modèle théorique.

4,4.2. Résultats - Confrontation théorie-expérience

La figure 21 reproduit quelques résultats typiques de cette analyse temporelle (qui confirme bien l'hypothèse d'homogénéité déjà constatée dans le paragraphe précédent). On remarque également sur l'ensemble de ces courbes que le coefficient de corrélation $\gamma(M,M',\tau)$ est bien une fonction paire de τ (à quelques «accidents locaux» près dont il est malaisé de savoir s'ils sont objectifs ou au contraire dus à la mesure elle-même).

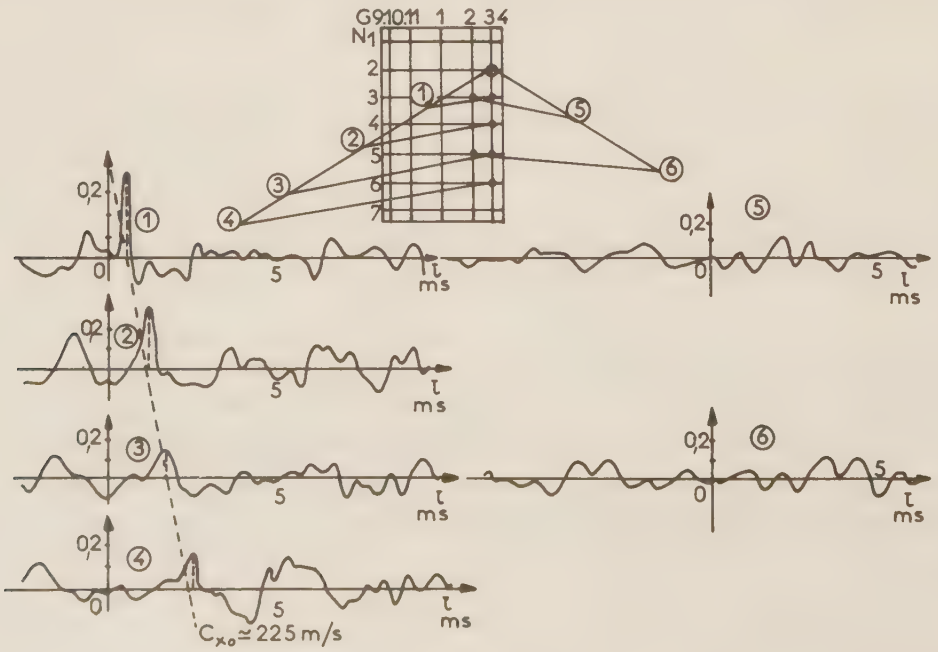


Fig. 21 - Coefficient de corrélation spatio-temporelle de la réponse.

Les courbes 21_1 à 21_4 sont relatives à une même génératrice. La présence d'un pic plus accentué sur les courbes permet de suivre aisément le phénomène de propagation déjà analysé antérieurement. On en déduit la vitesse moyenne C_{xo} de l'ordre de 225 m/s, c'est-à-dire légèrement supérieure à ce que nous avions obtenu dans l'étude spectrale du paragraphe précédent. La raison de cette différence n'a pas été complètement éclaircie mais, comme on peut le constater sur la figure, la présente détermination de C_{xo} et sans doute moins précise que la précédente en raison de l'élargissement des pics quand la distance des points de mesure augmente, et de la **faiblesse du coefficient de corrélation.**

L'observation la plus importante est en effet celle-ci : sauf au voisinage immédiat du point de référence fixe ($G_3 N_2$), le coefficient de corrélation γ garde des valeurs faibles quel que soit τ. Les vibrations recueillies en deux points très voisins, non situés sur la même génératrice, ont un coefficient de corrélation encore plus faible (courbe 5) que ce qui a été obtenu en longitudinal. On n'observe alors plus d'évolution sensible quand la distance augmente (comparer les courbes 5 et 6). Pour le retard nul ($\tau = 0$), l'ensemble des résultats montrent que $\gamma(M,M',0)$ est négligeable : le champ vibratoire global n'est donc corrélé que sur une distance très faible, donnée par

V(14) $$\mathcal{L} = \int_0^\infty \gamma(|\overrightarrow{MM'}|, 0)\, d\xi$$

où $\mathcal{L}$ dépend de la direction de $\overrightarrow{MM'}$, avec $|\overrightarrow{MM'}| = \xi$. Cette distance est ici trop petite pour être déterminée à partir de nos résultats.

Suivant une génératrice, on peut exprimer la durée de vie ou durée de parcours cohérent de « l'onde » qui se propage par la quantité :

V(15) $$\mathcal{T} = \frac{1}{C_{xo}} \int_0^\infty \gamma\left(\xi, \frac{\xi}{C_{xo}}\right) d\xi$$

où $\gamma\left(\xi, \frac{\xi}{C_{xo}}\right)$ représente l'enveloppe des maxima du coefficient de corrélation suivant Ox. L'allure générale de cette fonction $\gamma\left(\xi, \frac{\xi}{C_{xo}}\right)$ est donnée par la figure 22 : après une décroissance très rapide au voisinage de l'origine, c'est-à-dire pour des écarts longitudinaux faibles, l'évolution devient plus lente, suivant une loi proche de $\left(\frac{\xi}{C_{xo}}\right)^{1/2}$, c'est-à-dire voisine de ce que nous avions prévu au chapitre III (cf. formule III(61)).

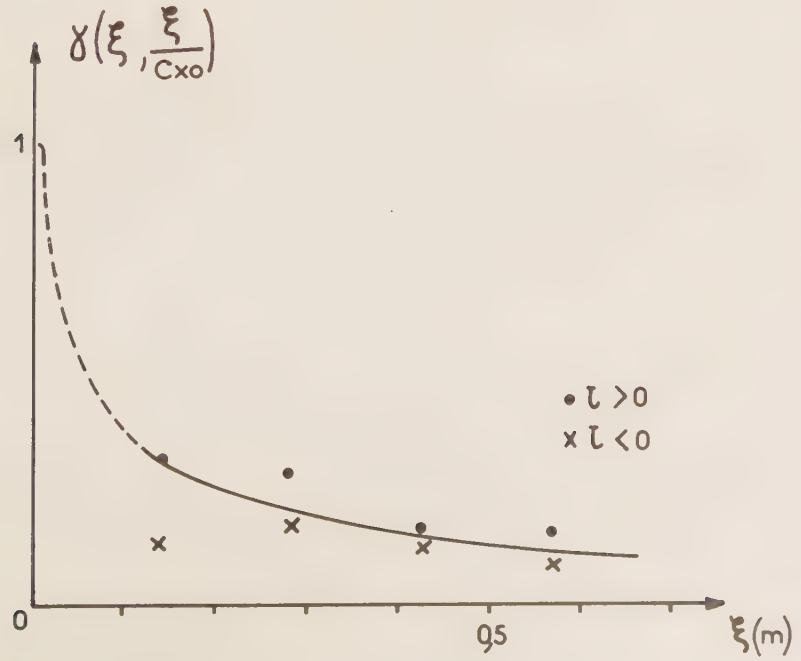


Fig. 22 - Décroissance des maxima du coefficient de corrélation (mesures sur une génératrice).

Il n'est pas possible de donner une valeur de V(15) à partir de nos résultats. Par contre, au lieu de définir la durée de parcours cohérent par cette échelle intégrale, on peut la définir conventionnellement par la durée au delà de laquelle $\gamma\left(\xi, \frac{\xi}{C_{xo}}\right)$ est inférieur à 0,1 par exemple. Alors, la figure 22 nous indique que ξ est de l'ordre de 0,65 m, c'est-à-dire $\tau = \frac{\xi}{C_{xo}} \simeq$ 3 ms.

Ceci termine la série des expériences destinées au contrôle du modèle global. Nous avons montré que la mesure de l'admittance d'entrée d'une structure permettait d'estimer sa densité modale et que les résultats obtenus en quelques points seulement suffisaient à en fournir une très bonne approximation. Le choix d'une loi de dissipation permet ensuite d'expliciter complètement les caractéristiques statistiques de la vibration dont la structure est le siège dans les conditions où le champ est réverbérant : le terme direct de la fonction de Green généralisée, qui exprime simplement le spectre de puissance moyen de la réponse en tout point sous une excitation ponctuelle de spectre blanc unité, peut alors être calculé aisément.

Enfin, les termes croisés de la fonction de Green généralisée ont été obtenus par le calcul et contrôlés par l'expérience, aussi bien dans leur représentation spectrale que dans leur représentation temporelle. Les hypothèses essentielles du calcul, développé dans le chapitre II et appliqué au cylindre dans le chapitre III, sont donc admissibles. **Ces résultats expérimentaux, qui sont à notre connaissance, tout à fait originaux, attestent la validité du point de vue global, de l'idéalisation du comportement réel de la structure par notre modèle physique, et de son expression mathématique. Il nous reste maintenant à faire la preuve de son efficacité pour la prévision des caractéristiques statistiques de la réponse d'une structure à une excitation aléatoire.**

5. PRÉVISION DE LA RÉPONSE A UNE EXCITATION ALÉATOIRE QUELCONQUE

5,1. Principe du contrôle global

Nous abordons maintenant la phase de contrôle global de la méthode. Connaissant les caractéristiques statistiques d'une excitation quelconque de la structure du cylindre, le modèle mathématique que nous avons défini et dont nous avons jusqu'à maintenant testé la validité permet-il effectivement de prévoir correctement les caractéristiques statistiques de sortie, c'est-à-dire par exemple la répartition spectrale de puissance de la vitesse en tout point du cylindre ?

Ce contrôle a été effectué dans un cas d'excitation relativement simple, tenant compte des moyens expérimentaux actuellement disponibles en laboratoire. Pour cela, deux forces ont été appliquées sur la structure par des excitateurs alimentés par des courants provenant du même générateur pilote, et délivrant une tension de bruit à large bande, sensiblement «plat» dans la gamme 20-2000 Hz. Dans ces conditions, les forces appliquées sont théoriquement «parfaitement corrélées», c'est-à-dire que leur cohérence :

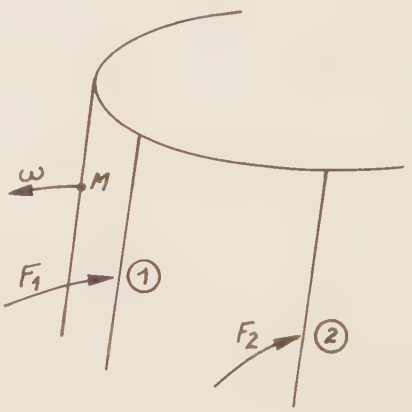
V(16) $$\mathcal{E}_{12} = \frac{S_{12}}{\left[S_{11}\ S_{12}\right]^{1/2}}$$

est réelle et égale à l'unité (S_{12} désignant le spectre croisé des deux forces, S_{11} et S_{12} leur spectre de puissance). L'analyse des tensions de prélèvement des amplificateurs de puissance, proportionnelles au courant alimentant les excitateurs, a permis de confirmer que $\mathcal{E}_{12}$ était bien très voisin de 1 quelle que soit la fréquence, dans la gamme intéressante ici.

Utilisant alors les résultats du chapitre I (expression (19bis)), la densité spectrale de puissance de la réponse peut s'écrire :

V(17) $$\phi_{\omega\omega} = \tilde{\varphi}_{11}\ S_{11} + \tilde{\varphi}_{22}\ S_{22} + 2\ R_e\left\{\tilde{\varphi}_{12}\ S_{12}\right\}$$

Alors, d'après le modèle de structure réverbérante $\tilde{\varphi}_{11}$ et $\tilde{\varphi}_{22}$ sont égales (rappelons qu'il s'agit du spectre de puissance de la réponse à la force F_1 seule ou à la force F_2 seule, ces deux forces étant de spectre blanc unité). D'autre part, $\tilde{\varphi}_{12}$ exprime le spectre croisé de réponse aux points 1 et 2 lorsque la structure est le siège d'un champ réverbérant; c'est-à-dire que η_{12}, défini par



V(18) $$\tilde{\eta}_{12} = \frac{\tilde{\varphi}_{12}}{\left[\tilde{\varphi}_{11}\ \tilde{\varphi}_{22}\right]^{1/2}} = \frac{\tilde{\varphi}_{12}}{\tilde{\varphi}}$$

(où l'on a posé $\tilde{\varphi}_{11} = \tilde{\varphi}_{22} = \tilde{\varphi}$) est supposé connu grâce à V(11). Alors, en tenant compte de V(16) et V(18), le spectre de puissance V(17) s'écrit :

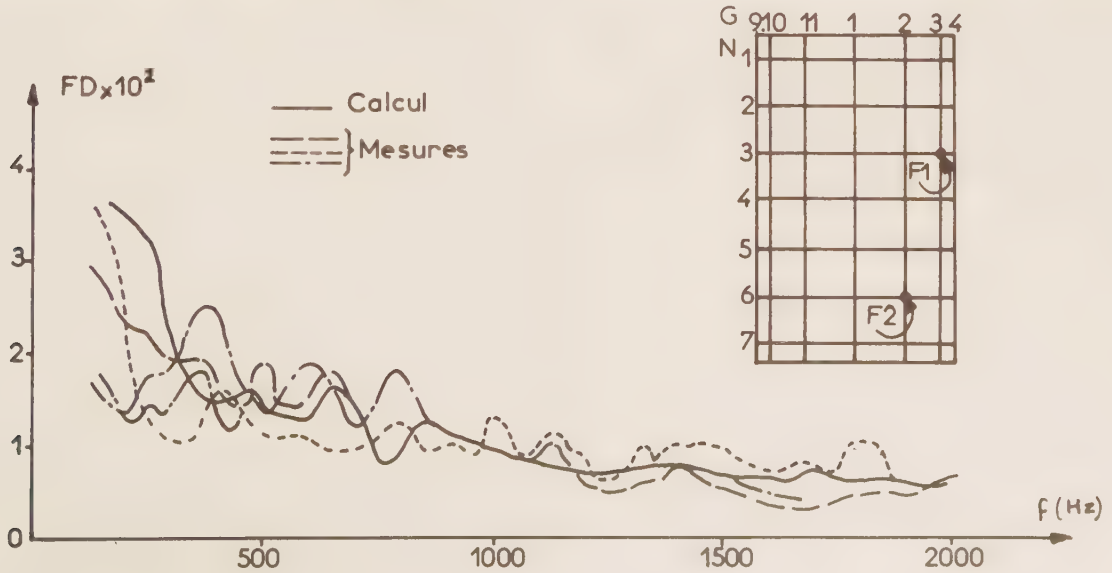
V(19) $$\frac{\phi_{\omega\omega}}{S_{11}} = \tilde{\varphi}\left\{1 + \frac{S_{22}}{S_{11}} + 2\left(\frac{S_{22}}{S_{11}}\right)^{1/2} \varepsilon_{12}\ \eta_{12}\right\}$$

$\tilde{\varphi}$ a été déterminé au paragraphe 4,2 par le choix d'un modèle de dissipation, η_{12} est connu grâce aux résultats du paragraphe 4,3. On a donc à mesurer S_{11} et S_{22} pour déterminer le rapport $\frac{\phi_{\omega\omega}}{S_{11}}$ en explicitant le second membre de V(19).

5,2. Résultats - Confrontation théorie-expérience

L'excitation étant appliquée aux points G_2N_6 et $G_3\ N_3$, l'analyse de la réponse a été faite en un certain nombre de points, avec la largeur de bande B = 64 Hz, pendant dix secondes.

La figure 23 fournit les courbes expérimentales obtenues, ainsi que l'évaluation théorique du résultat. On a porté en ordonnées la quantité $FD = \left[\frac{\phi_{\omega\omega}}{S_{11}}\right]^{1/2}$ (en m/ s/ N) qui a encore la dimension d'une admittance.



Comme on peut le constater, la courbe théorique constitue une bonne approximation du spectre moyen de réponse dans la majeure partie de la gamme d'analyse. L'écart est plus sensible aux fréquences basses, probablement à cause du choix du modèle de dissipation, unique dans toute la bande, et qui représentait moins bien la réalité dans la partie inférieure du spectre.

En définitive, on peut estimer que la prévision obtenue est satisfaisante, et que le modèle mathématique du comportement dynamique de la structure est validé par l'ensemble de ces résultats.

*

Chapitre VI – CONCLUSION

Ce mémoire présente une tentative de synthèse cohérente des idées récentes appliquées à l'analyse des caractéristiques dynamiques des structures vibrantes. A partir d'un examen critique des difficultés rencontrées dans la représentation classique des mouvements de la structure par le formalisme modal, pour résoudre le problème de la prévision de son comportement sous charge aléatoire, nous avons été conduits, en définitive, à mettre en question le concept de base de système déterministe. Avec lui disparait la notion de mode en tant qu'entité physiquement observable caractérisée, pour des conditions aux limites précises, par sa fréquence propre, sa déformée spatiale et son énergie cinétique (ou sa masse généralisée). Selon ce point de vue, bien connu des physiciens du Solide, le système mécanique est alors constitué d'une collection de résonateurs possédant, dans une bande de fréquences donnée, une certaine densité de fréquences propres ou densité modale. Dans le cadre de l'hypothèse classique où les longueurs d'onde sont petites devant les dimensions de la structure (approximation dite géométrique), la théorie, valable en milieu homogène ou localement homogène, s'affranchit des conditions aux limites et se donne pour objet de décrire les caractéristiques dynamiques de la structure en termes de propagation de paquets d'ondes en milieu **indéfini.** Le passage du discret au continu dans le domaine spectral se traduit, dans l'espace, par le passage du milieu fini au milieu indéfini : cette dualité s'exprime analytiquement par des relations entre densité modale et vitesse de groupe ou admittance d'entrée du milieu indéfini. Une partie de notre travail sur ce point constitue une contribution originale aux recherches entreprises par d'autres auteurs, notamment aux Etats-Unis par *R.H. Lyon* et *al.* ; nous nous sommes efforcés de donner un exposé systématique de certains résultats connus ou de généraliser leur domaine de validité.

La notion de fonction de Green généralisée, introduite par l'auteur, possède une signification physique qui permet de décrire aisément les caractéristiques spatiales du champ vibratoire régnant dans le système mécanique dans une bande de fréquences donnée. Sous des hypothèses raisonnables, analogues à l'hypothèse d'équipartition de l'énergie entre les modes de la bande considéré, on montre qu'une idéalisation convenable de cette fonction peut être obtenue analytiquement à partir du coefficient de corrélation croisée du champ vibratoire de type «diffus» se propageant sur la structure indéfinie (On tient compte, en fait, du caractère **directif** de cette propagation). On dispose alors d'une représentation mathématique de la fonction de Green généralisée, utilisable pour le calcul de la réponse à des excitations aléatoires quelconques. Des applications particulières de ces résultats généraux, dans le cas de membranes ou de la flexion de plaques planes et cylindriques, aboutissent à des expressions analytiques maniables. L'étude approfondie du problème du cylindre circulaire mince, dans le cadre de la théorie approchée de *Donnell* pour les vibrations de flexion, permet une confrontation probante des résultats théoriques et expérimentaux et valide en définitive la méthode de calcul prévisionnelle des caractéristiques statistiques de la réponse à une excitation aléatoire. Ce travail représente une contribution originale de l'auteur. L'application qui en est faite au problème de la transmission de l'énergie vibratoire entre une «structure réverbérante» et un système mécanique attaché en des points discrets recoupe des résultats connus et étend la méthode de calcul au cas de systèmes à N degrés de liberté avec liaisons multiples.

Il est maintenant nécessaire de s'interroger sur l'avenir, en se livrant à l'examen critique des résultats présentés. Il est bien évident que nous devrons, pour le moment, nous borner à avancer quelques idées personnelles préliminaires à une discussion plus large et plus approfondie:

Nous plaçant d'abord au point de vue de l'ingénieur, affronté à un problème de vibration en régime aléatoire sur une structure complexe, supposée linéaire, nous dégagerons les points suivants :

a) Sur un plan purement expérimental, il est toujours possible de déterminer la fonction de Green généralisée d'un système, dans une bande de fréquences donnée, par la mesure directe de la densité spectrale croisée de réponse, en des couples de points formant les nœuds d'un maillage, sous une excitation aléatoire ponctuelle de spectre blanc. De même, quelle que soit la complexité de la structure, y compris dans les cas fortement non homogènes, on peut toujours estimer la densité modale à l'aide de mesures de l'admittance d'entrée moyenne, l'adjectif « moyenne » étant relatif à la fois à une bande de fréquence donnée et à une moyenne spatiale, pondérée, le cas échéant, par la répartition de masse. Ces mesures demandent, évidemment, des moyens d'analyse puissants dont la diffusion est encore relativement restreinte compte tenu de l'investissement qu'ils représentent. Toutefois, cet inconvénient peut être surmonté aisément par enregistrement des signaux-mesure sur support magnétique intermédiaire, et dépouillement en temps différé.

b) Il est clair qu'un effort de **développement** de la méthode globale est nécessaire pour lui donner sa pleine efficacité. On peut prévoir que, par l'analyse des résultats d'essais variés et la poursuite des travaux d'interprétation théorique, des progrès et des simplifications seront apportés sur le plan méthodologique. La recherche de modèles mathématiques de la fonction de Green, valables dans des cas plus généraux que ceux que nous avons examinés ici, constitue sans doute un des objectifs majeurs de cet effort.

c) Certains aspects des problèmes rencontrés dans le domaine pratique ont été peu évoqués dans ce travail. Par exemple, les questions relatives à la transparence acoustique des structures, qui sont parfaitement justiciables de ce type d'approche analytique, mériteraient un examen qui n'a pu trouver place dans notre étude.

Sur le plan des idées générales, il paraît capital de souligner une fois encore les analogies entre certains raisonnements de la présente théorie et ceux qui sont classiques dans d'autres domaines de la physique. L'idée d'un système mécanique macroscopique à caractéristiques non déterministes, où les modes d'une bande donnée, indiscernables expérimentalement, possèdent une énergie équirépartie, fait image à la représentation des modes de vibration des atomes d'un milieu cristallin dans la théorie de la chaleur spécifique des solides. De même, il existe un parallélisme évident entre la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu localement homogène et l'approximation de l'optique géométrique ou la mécanique des particules dont les longueurs d'onde (aus sens de la mécanique ondulatoire) sont assez faibles. On peut penser que le sens physique profond de certains de nos résultats pourrait encore être éclairé à l'aide de considérations, empruntées à d'autres disciplines, que nous n'avons peut être pas su mettre complètement en évidence jusqu'à maintenant et qui justifieraient une réflexion encore approfondie. Cette confirmation de l'interdépendance des disciplines de la physique est, en définitive, une incitation à poursuivre les recherches dans la voie où nous nous sommes engagés et dont ce travail constitue une première approche.

Annexe

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES SOLUTIONS DU PROBLÈME DES VIBRATIONS LIBRES D'UNE STRUCTURE, HOMOGÈNE OU NON (APPROXIMATION GÉOMÉTRIQUE)

1. INTRODUCTION

Nous nous intéressons ici principalement aux vibrations libres de structures, **homogènes ou non**, dans une gamme de fréquences telle que les déformées présentent un nombre élevé de nœuds et de ventres. Nous avons montré que, dans le cas des problèmes relatifs aux structures homogènes, et pour certains types de conditions aux limites, cela revient à dire que chaque mode propre de vibration possède une déformée sinusoïdale oscillant un grand nombre de fois sur l'étendue de la structure. Dans ce cas, il est légitime de parler d'approximation des grands nombres d'onde, et d'utiliser les résultats classiques concernant leur distribution quand l'ordre du mode augmente, c'est-à-dire des relations du type :

A(1) $$K_x = k_x L_x = p\pi + K_1 \qquad p \text{ entier} > 0$$

où L_x représente la dimension réelle de la structure suivant la direction Ox . L'écart entre les valeurs successives de K_x est alors constant et égal à π , Cela nous a permis, dans l'étude de la densité modale d'une structure, d'associer à chaque mode une cellule élémentaire (dans l'espace réciproque des vecteurs d'onde) de «dimensions» constantes quel que soit l'ordre du mode.

En fait, nous ne savons pas encore si ce schéma est légitime quelles que soient les conditions aux limites. Pour prendre un exemple simple, on sait que les déformées successives d'une poutre homogène cantilever se présentent comme une combinaison de termes sinusoïdaux et d'exponentielles d'argument réel. L'équation caractéristique

$$1 + \cos K_x \operatorname{ch} K_x = 0$$

se ramène bien à la forme A(1) en première approximation pour les modes d'ordre p **élevés.** Mais rien n'indique a priori que les formes propres tendent à devenir sinusoïdales.

De même, si la structure n'est pas homogène, nous ne pouvons plus du tout utiliser le raisonnement précédent et il est nécessaire de donner une autre définition de la densité modale pour en faire le calcul explicite.

Notre objectif est de montrer, à partir de cas simples de structures homogènes ou non, que l'on peut effectivement se ramener à l'étude de fonctions propres asymptotiques à variation sinusoïdale. L'amplitude et la fréquence spatiale de ces fonctions propres dependent alors en général du point de l'espace que l'on considère.

2. VIBRATIONS LIBRES D'UNE POUTRE HOMOGÈNE (APPROXIMATION GÉOMÉTRIQUE)

Les vibrations libres d'une poutre quelconque sont solution de l'équation

A(2) $$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + \bar{\rho}\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

où l'on néglige l'inertie de rotation. E , I et $\bar{\rho}$ désignent respectivement le module d'Young, l' inertie de section et la masse par unité de longueur de la poutre.

Les vibrations libres de la forme $y(x,t) = Y(x)\exp j\omega t$ imposent à $Y(x)$ de vérifier l'équation différentielle :

A(3) $$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\ \frac{d^2 Y}{dx^2}\right) - \bar{\rho}\,\omega^2 Y = 0$$

et l'hypothèse d'homogénéité permet d'écrire

A(4) $$(EI)_o\ Y^{(IV)} - \bar{\rho}_o\,\omega^2 Y = 0$$

(l'indice ô étant relatif à la poutre homogène).

La solution générale s'écrivant

A(5) $$\begin{cases} Y(x) = f(x) + g(x) \\ \text{avec} \quad f(x) = A\cos k_o x + B\sin k_o x \\ \qquad\quad g(x) = C\,\mathrm{ch}\,k_o x + D\,\mathrm{sh}\,k_o x \end{cases}$$

ce qui impose la relation entre ω et k :

A(6) $$k_o^4 = \frac{\bar{\rho}_o\,\omega^2}{(EI)_o}$$

Dans chaque cas particulier, les conditions aux limites permettent de déterminer les constantes A, B, C, D et les valeurs permises de k . Ces conditions aux limites sont supposées homogènes, et l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI_o\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ est alors hermitien.

Nous nous proposons de montrer que, dans l'approximation des grandes valeurs de k_o , et quelles que soient les conditions aux limites, la solution de l'équation A(4) converge, en moyenne quadratique, vers la solution $Y(x) = f(x)$ c'est-à-dire vers une fonction propre sinusoïdale.

Pour cela, calculons l'énergie cinétique totale de la poutre. On a

A(7) $$2T = \omega^2 \int_o^{L_o} \bar{\rho}_o\, Y^2(x)\, dx = \bar{\rho}_o\,\omega^2 \int_o^{L_o} Y^2(x)\, dx$$

et, en vertu de l'hermiticité de l'opérateur différentiel, on a classiquement :

$$\bar{\rho}_o \omega^2 \int_o^{L_o} y^2(x)\, dx = (EI)_o \int_o^{L_o} y''^2(x)\, dx$$

avec, d'après A(5)

$$y'' = - k_o^2 \left[f(x) - g(x) \right]$$

ce qui donne

$$\bar{\rho}_o \omega^2 \int_o^{L_o} (f+g)^2\, dx = (EI)_o\, k_o^4 \int_o^{L_o} (f-g)^2\, dx$$

et, en tenant compte de A(6)

A(8) $$\bar{\rho}_o \omega^2 \int_o^{L_o} f(x)\, g(x)\, dx = 0$$

$f(x)$ et $g(x)$ sont donc orthogonales. A(7) donne alors :

A(9) $$2T = \bar{\rho}_o \omega^2 \int_o^{L_o} \left[f^2(x) + g^2(x) \right] dx$$

et un calcul immédiat montre que :

$$\int_o^{L_o} g^2(x)\, dx = (C^2 - D^2) \frac{L_o}{2} + \frac{sh\, k_o L_o}{4 k_o} \left[(C+D)^2 e^{k_o L_o} + (C-D)^2 e^{-k_o L_o} \right]$$

Cette quantité doit rester finie **quand $k_o L_o$ tend vers l'infini,** ce qui peut se produire, **soit si la longueur de la poutre augmente indéfiniment, soit si l'ordre du mode augmente indéfiniment pour L_o fini.** On doit donc imposer :

$$C + D = 0$$

et il reste :

$$\int_o^{L_o} g^2(x)\, dx = \frac{C^2}{2 k_o} \left(1 - e^{-2 k_o L_o} \right)$$

L'énergie cinétique A(9) s'écrit donc :

$$2T = \bar{\rho}_o \omega^2 \int_o^{L_o} f^2(x)\, dx + \frac{\bar{\rho}_o \omega^2 C^2}{2 k_o} \left(1 - e^{-2 k_o L_o} \right)$$

Alors, pour $k_o L_o$ suffisamment grand, on peut écrire

A(10) $$2T \simeq \bar{\rho}_o \omega^2 \int_o^{L_o} f^2(x)\, dx$$

L'énergie cinétique totale de la poutre homogène tend bien vers l'énergie fournie par la contribution des termes sinusoïdaux. En particulier, la masse généralisée de chaque mode a pour expression asymptotique :

A(11) $$\mu = \int_o^{L_o} \bar{\rho}_o \left[A \cos k_o x + B \sin k_o x \right]^2 dx$$

La fonction propre asymptotique peut alors se mettre sous la forme

A(12) $$Y_o(x) = W_o \cos \left(k_o x + \eta_o \right)$$

et les valeurs de k permises sont celles qui annulent $y_o(x)$ ou une de ses dérivées jusqu'à l'ordre trois à l'extrémité $x = L$, soit :

A(13)
$$\begin{cases} \cos(k_o L_o + \eta_o) = 0 \\ \text{ou} \quad \sin(k_o L_o + \eta_o) = 0 \end{cases}$$

ce qui donne bien des solutions $k_o L$ de la forme A(1). La masse généralisée du mode d'ordre p est alors :

$$\mu_p = \bar{\rho}_o \frac{L_o}{2}\left[1 - \frac{\sin 2\eta_o}{2k_{op}L_o}\right] \qquad (W_o = 1\,m)$$

ou

A(14)
$$\boxed{\mu_p \simeq \bar{\rho}_o \frac{L_o}{2} = \frac{M_{o7}}{2}}$$

3. VIBRATIONS LIBRES D'UNE POUTRE NON HOMOGÈNE (APPROXIMATION GÉOMÉTRIQUE)

Nous allons maintenant supposer que les termes EI et $\bar{\rho}$ sont des fonctions de l'abscisse x, et examiner le problème des fonctions propres asymptotiques, masses généralisées, et densité modale de la poutre non homogène, dont le mouvement est décrit par l'équation A(3). Nous ferons l'hypothèse supplémentaire que EI et $\bar{\rho}$ sont des fonctions lentement variables de x.

3,1. Formes propres asymptotiques

Après avoir posé $x = \xi L_o$, l'équation des mouvements libres A(3) s'écrit

A(15)
$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left[EI \frac{d^2y}{d\xi^2}\right] - \bar{\rho}\omega^2 L_o^4 y = 0$$

ce qui peut encore se mettre sous la forme :

A(16)
$$\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{d^2}{d\xi^2}\left[\bar{\alpha} \frac{d^2y}{d\xi^2}\right] - (k_o u')^4 y = 0$$

ou on a posé

A(17)
$$\begin{cases} K_o^4 = \dfrac{\bar{\rho}_o \omega^2 L_o^4}{(EI)_o} \\ u'^4 = \dfrac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_o} \dfrac{(EI)_o}{EI} \qquad \left(u' = \dfrac{du}{d\xi} = \dfrac{c_o}{c} = \dfrac{1}{n}\right) \\ \bar{\alpha} = \dfrac{EI}{(EI)_o} \end{cases}$$

c désignant la vitesse de phase locale. n est donc un indice local de réfraction.

Nous attribuons ici l'indice zéro aux constantes élastiques, massiques et géométriques d'une **poutre de référence, homogène,** de longueur L_o . La fonction $u(\xi)$, qui intervient par sa dérivée dans A(16) est pour le moment inconnue. Dans le cas d'une poutre homogène, u' est égal à 1, ainsi que α : les vibrations libres de la poutre de référence sont alors solutions de

A(4bis) $$\frac{d^4 Y_k}{d\xi^4} - K_o^4 Y_k = 0$$

qui est bien analogue à A(4).

Nous avons vu au chapitre précédent que la forme propre asymptotique solution de A(4bis) pouvait se mettre sous la forme :

A(12bis) $$Y_k(\xi) = W_o \cos(K_o \xi + \eta)$$

la suite des valeurs de K_o étant alors régulièrement espacée sur l'axe des K , avec la distance π .

Nous cherchons maintenant une solution du problème **non homogène, dans l'approximation géométrique, c'est-à-dire dans le cas où le déformée présente un grand nombre de nœuds,** sous la forme

A(18) $$y(\xi) = W(\xi) \cos[K_o u(\xi) + \eta]$$

qui généralise A(12bis) puisque l'amplitude et la fréquence spatiale de la solution sont maintenant des fonctions de ξ , supposées lentement variables et dérivables.

Nous allons écrire que A(18) est solution de A(16), en introduisant l'hypothèse que K_o est grand (la structure de référence homogène présente un grand nombre d'ondes sur sa longueur L_o). Les dérivations successives jusqu'à l'ordre quatre font apparaître une succession de termes en puissances de K_o. Suivant une idée de *G. Coupry* [26] que nous généraliserons ici, nous négligerons les termes de puissance inférieure à l'ordre trois. Il vient successivement :

$$y'(\xi) = W' \cos[\,] - K_o u' W \sin[\,]$$
$$y''(\xi) = [W'' - (K_o u')^2] \cos[\,] - [2 K_o u' W' + K_o u'' W] \sin[\,]$$

et, d'autre part :

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left[\bar{\alpha} \frac{d^2 y}{d\xi^2}\right] = \alpha'' y'' + 2\alpha' y''' + \alpha y^{(iv)}$$

En développant, puis en négligeant les termes en K_o^2 , K_o et K_o° , on trouve :

$$\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{d^2}{d\xi^2}\left[\bar{\alpha} \frac{d^2 y}{d\xi^2}\right] = 2 (K_o u')^3 W \sin[\,] \left\{ \frac{\alpha'}{\alpha} + \frac{3u''}{u'} + 2\frac{W'}{W} \right\} + (K_o u')^4 W \cos[\,]$$

et, en reportant dans A(16), il vient, au second ordre près :

$$\frac{\bar{\alpha}'}{\bar{\alpha}} + \frac{3u''}{u'} + 2\frac{W'}{W} = 0$$

soit $$\bar{\alpha} u'^3 W^2 = C^{te}$$

ou, après avoir remplacé $\bar{\alpha}$ par sa valeur $\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_o} u'^{-4}$ tirée de A(17)

A(19) $$\rho \frac{W^2}{u'} = \bar{\rho}_o W_o^2$$

Cette relation, qui fait intervenir **la densité d'énergie** de la poutre homogène ($\bar{\rho}_o \, W_o^2$) montre que possède la même signification pour la poutre non homogène. On en déduit la loi de variation de l'amplitude :

A(20) $$W = W_o \left[\frac{\bar{\rho}_o}{\bar{\rho}} u' \right]^{1/2}$$

La solution A(18) s'écrit donc :

A(21) $$Y(\xi) = W_o \left[\frac{\bar{\rho}_o}{\bar{\rho}} u' \right]^{1/2} \cos \left[k_o \, u(\xi) + \eta \right]$$

avec $$u(\xi) = \int_o^{\xi} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_o} \right]^{1/4} d\xi$$

et cette expression est bien identique à A(12bis) dans le cas homogène.

Pour résoudre complètement le problème, il est nécessaire de définir maintenant la structure homogène de référence dont les caractéristiques élastiques et massiques ont été introduites dans le calcul précédent d'une manière purement formelle.

3,2. Structure homogène de référence

Supposons pour cela qu'à la pulsation ω , la poutre non homogène vibre suivant un mode comportant m nœuds, en général non équidistants, répartis sur la longueur L. Nous allons imposer également que ω soit la pulsation propre d'un mode de la structure de référence comportant le **même** nombre de nœuds m sur la longueur L_o. En considérant la déformée A(21), on définit la fréquence spatiale de l'argument de cos $\left[k_o \, u(x) + \eta \right]$ par $\gamma_s = \frac{1}{2\pi} k_o \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\pi} \frac{K_o}{L_o} \frac{du}{dx}$ Le nombre de nœuds par unité de longueur est donc

$$dm = 2\gamma_s = \frac{1}{\pi} \frac{K_o}{L_o} \frac{du}{dx}$$

soit, pour la poutre entière, de longueur L

A(22) $$m = \frac{1}{\pi} \frac{K_o}{L_o} \int_o^L \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{\pi} \frac{K_o}{L_o} u(L)$$

Nous allons maintenant **définir la poutre homogène de référence comme celle qui, à la même fréquence possède un mode propre de vibration comportant le même nombre de nœuds, mais répartis sur la longueur L_o.** On a donc :

A(23) $$m = \frac{1}{\pi} \frac{K_o}{L_o} \int_o^{L_o} \frac{du}{dx} dx = \frac{1}{\pi} K_o$$

puisque $u(x) = x$ si la structure est homogène.

En comparant A(22) et A(23), il vient, grâce à A(20)

A(24) $$u(L) = L_o = \int_o^L \left[\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_o} \right]^{1/4} dx$$

en posant $x = \xi L_o$, on tire :

A(25) $$\int_o^{\xi_L} \left[\frac{1}{\bar{\alpha}} \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_o} \right]^{1/4} d\xi = 1 \qquad \left(\text{avec } \xi_L = \frac{L}{L_o} \right)$$

ce qui entraine, d'après A(17) :

A(26) $$\left[\frac{\rho_o}{EI_o}\right]^{1/4} = \int_o^{\xi_L} \left[\frac{\bar{\rho}}{EI}\right]^{1/4} d\xi$$

La fréquence propre du mode correspondant à une valeur donnée de K_o (ou de m) est donc, d'après la première relation A(17) :

A(27) $$f_m = \frac{1}{2\pi} \frac{K_o^2}{L_o^2} \left[\frac{(EI)_o}{\bar{\rho}_o}\right]^{1/2} = \frac{1}{2\pi} \frac{K_o^2}{L_o^2} \left[\int_o^{\xi_L} \left[\frac{\bar{\rho}}{EI}\right]^{1/4} d\xi\right]^{-2}$$

ou, en revenant à la variable x :

A(28) $$f_m = \frac{1}{2\pi} K_o^2 \left[\int_o^L \left(\frac{\rho}{EI}\right)^{1/4} dx\right]^{-2}$$

La fréquence propre est donc parfaitement déterminée. Les dimensions de la structure de référence sont d'autre part reliées par A(26) à celles de la structure non homogène. A ce stade, il est possible de calculer la densité modale de la structure non homogène.

3,3. Densité modale

Nous venons de voir que le nombre de nœuds d'un mode correspondant à une valeur donnée de la fréquence était identique sur la structure non homogène et sur la structure de référence. En utilisant A(23) et A(28), on peut écrire :

A(29) $$m = \frac{1}{\pi} \omega^{1/2} \int_o^L \left(\frac{\rho}{EI}\right)^{1/4} dx$$

Remarquons alors que le comptage du nombre de nœuds d'un mode de fréquence connue, f, revient également à compter **le nombre de modes** de fréquence inférieure à f (à une unité près, éventuellement). Le nombre de nœuds est en effet augmenté de 1 quand le numéro d'ordre du mode l'est également. Soit $N(f)$ le nombre de modes de fréquence inférieure à f. On a donc $N(f) = m$, soit, d'après A(29 :

A(30) $$m = N(f) = \frac{1}{\pi} \omega^{1/2} \int_o^L \left(\frac{\rho}{EI}\right)^{1/4} dx$$

et la densité modale est $\bar{n}(f) = \frac{dN}{df}$, c'est-à-dire

A(31) $$\boxed{\bar{n}(f) = \frac{1}{(2\pi f)^{1/2}} \int_o^L \left(\frac{\rho}{EI}\right)^{1/4} dx}$$

ou encore, pour la structure de référence :

A(32) $$\boxed{\bar{n}(f) = \frac{1}{(2\pi f)^{1/2}} L_o \left[\frac{\rho_o}{EI_o}\right]^{1/4}}$$

3,4. Densité modale et vitesse de groupe

Il est important de remarquer maintenant le lien qui unit la densité modale de la structure non homogène et **la vitesse de groupe** des vibrations sur la structure de référence.

Nous avons dit au paragraphe 3,2 que le nombre de nœuds du mode de fréquence f sur la longueur totale L de la poutre non homogène était (cf. A(22)) :

A(22) $$m = \int_0^L 2\,\gamma_s(x)\,dx$$

et nous venons de montrer que la densité modale vaut

$$\bar{n}(f) = \frac{dN}{df} = \frac{dm}{df}$$

soit, en utilisant A(22) :

$$\bar{n}(f) = 2\int_0^L \frac{\partial \gamma_s(x)}{\partial f}\,dx$$

avec

A(33) $$\gamma_s = \frac{1}{2\pi}\,k_0\,\frac{du}{dx}$$

Il vient donc :

A(34) $$\bar{n}(f) = 2\,\frac{\partial k_0}{\partial \omega}\int_0^L \frac{du}{dx}\,dx$$

et, en utilisant la vitesse de groupe $V_{g_0}(\omega) = \frac{\partial \omega}{\partial k_0}$

A(35) $$\boxed{\bar{n}(f) = \frac{2}{V_{g_0}(f)}\,u(L) = \frac{2L_0}{V_{g_0}(f)}}$$

où l'on a tenu compte de A(24).

La densité modale de la poutre non homogène est ainsi directement reliée au **temps de propagation de l'énergie** sur la structure homogène de référence. Le second membre de A(34) montre alors que l'énergie se propage dans la poutre non homogène avec la **vitesse locale** $U(x,f)$ telle que :

A(36) $$\frac{1}{U(x,f)} = \frac{\partial^2}{\partial \omega\ \partial x}\left[k_0\,u\right]$$

et il vient :

A(37) $$\boxed{\bar{n}(f) = 2\int_0^L \frac{dx}{U(x,f)}}$$

$\bar{n}(f)$ représente donc le temps moyen de propagation de l'énergie dans la poutre non homogène.

Ces résultats n'avaient encore jamais été signalés, à notre connaissance.

3,5. Masse généralisée asymptotique

En utilisant A(21) et A(17), on montre aisément que la masse généralisée asymptotique de la poutre non homogène s'écrit :

$$\mu = \bar{\rho}_o \, W_o^2 \, L_o \int_o^L \frac{du}{d\xi} \cos^2 \left(K_o u + \eta \right) d\xi$$

ce qui donne, après calculs, si M_{oT} désigne la masse de la structure de référence :

$$\mu = \frac{M_{oT}}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{4K_o} \left[\sin 2\left(K_o \xi_L + \eta \right) - \sin 2\eta \right] \right\} \qquad (W_o = 1m)$$

soit, pour K_o assez grand :

A(38) $$\boxed{\mu \simeq \frac{M_{oT}}{2}}$$

La masse généralisée de la poutre non homogène est égale à celle de la poutre homogène (cf. A(14)).

3,6. Exemple

Soit une poutre non homogène de section rectangulaire variable (en épaisseur), simplement appuyée en $x = 0$ et $x = L$. La loi d'épaisseur est de la forme :

$$h(x) = \frac{h_1}{\left(1 + \frac{x}{L} \right)^2}$$

On cherche à déterminer les caractéristiques de la poutre homogène de référence (de même module d'Young et même masse spécifique).

On a, dans le cas d'une poutre de section rectangulaire de largeur b :

$$\frac{\bar{\rho}}{EI} = \frac{\rho b h}{E b \frac{h^3}{12}} = \frac{12\rho}{E} \frac{1}{h^2} = \frac{12}{c_L^2 h^2}$$

avec $c_L^2 = \frac{E}{\rho}$. D'après A(26), et en utilisant l'expression de $h(x)$, on doit avoir :

$$\left[\frac{\bar{\rho}_o}{(EI)_o} \right]^{1/4} = \left(\frac{12}{c_L^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{h_o}} = \left(\frac{12}{c_L^2} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{h_1}} \int_o^{\xi_L} \left(1 + \frac{L_o}{L} \xi \right) d\xi$$

soit :

A(39) $$\frac{L_o}{\sqrt{h_o}} = \frac{3}{2} \frac{L}{\sqrt{h_1}}$$

La fréquence propre d'un mode correspondant à $K_{o,m}$ et possédant m nœuds sur $(0, L)$ (ou sur $(0, L_o)$ pour la poutre homogène) est donnée par A(27) soit :

$$f_m = \frac{1}{2\pi} K_{o,m}^2 \frac{C_L}{2\sqrt{3}} \frac{h_o}{L_o^2}$$

ce qui donne, d'après A(39) :

A(40) $$f_m = \frac{1}{2\pi} K^L_{o,m} \frac{C_L}{2\sqrt{3}} \frac{4h_1}{3L^2}$$

La forme propre correspondante s'écrit alors, d'après A(21) et en utilisant A(39) :

A(41) $$y(\xi) = W_o \left(\frac{2L_o}{3L}\right)^{3/2} \left[1+\xi\frac{L_o}{L}\right]^{3/2} \cos\left\{\frac{2K_{o,m}L_o}{3L}\xi\left(1+\frac{3L_o}{2L}\right)+\eta\right\}$$

et cette fonction peut également satisfaire les conditions aux limites $y(0) = y(\xi_L) = 0$ en choisissant $\eta = -\frac{\pi}{2}$. $\left(K_{o,m} = m\pi\right)$. Mais ceci n'est pas vrai en général.

La densité modale vaut alors :

$$\bar{n}(f) = \omega^{-1/2} \frac{L_o}{\sqrt{h_o}} \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{C_L}}$$

soit, en utilisant A(39)

A(42) $$\boxed{\bar{n}(f) = \omega^{-1/2} \cdot \frac{3}{2} \frac{L}{\sqrt{h_1}} \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{C_L}}}$$

Le problème est donc complètement résolu en ce qui concerne la structure non homogène, puisque A(40, A(41) et A(42) fournissent les expressions de la fréquence propre, de la déformée asymptotique et de la densité modale. La structure homogène de référence n'a été utilisée que comme un intermédiaire de calcul : nous n'avons précisé ses caractéristiques que par A(39) et il subsiste donc un arbitraire quant à ses dimensions. Alors, si on désire lever cette indétermination, on doit imposer une condition supplémentaire ; par exemple, on peut lui inposer d'avoir une masse égale à celle de la poutre non homogène. Celle-ci vaut :

$$M_T = \int_0^L \rho b h(x)\, dx = \rho b h_1 \frac{L}{2}$$

D'autre part, on a, pour la poutre de référence

$$M_{oT} = \rho b h_o L_o$$

Alors, pour $M_T = M_{oT}$ on aura

A(43) $$h_o L_o = h_1 \frac{L}{2}$$

compte tenu de A(39), ceci donne finalement :

A(44) $$h_o = \frac{h_1}{\sqrt[3]{9}}$$

$$L_o = \frac{3L}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

et on peut alors effectivement calculer les longueurs d'onde des modes associés à une valeur donnée de K_o , puisque L_o est connu. La masse généralisée de la poutre non homogène est donnée par A(38). On a $\mu = \frac{M_{oT}}{2}$ soit :

$$\mu = \frac{1}{2}\rho b h_o L_o = \frac{1}{2}\rho b h_1 \frac{L}{2} = \frac{M_T}{2}$$

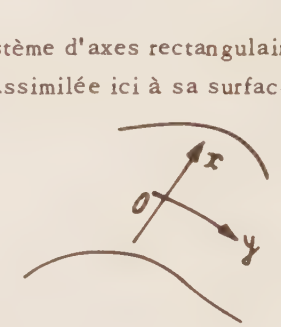
4. GÉNÉRALISATION

4,1. Remarque fondamentale

Nous avons considéré jusqu'à maintenant un problème monodimensionnel portant sur une poutre non homogène dont les coefficients élastiques et massiques évoluent lentement avec l'abscisse x sur la poutre. Les déformées asymptotiques peuvent alors être représentées par des fonctions sinusoïdales, c'est-à-dire que le mouvement en tout point x est représenté par une combinaison d'exponentielles de la forme $\exp j\left[\omega t \pm K_o u(x)\right]$ où les coefficients de la combinaison sont également fonction de x et où K_o augmente par valeurs multiples entières de π. A ce problème, nous avons adjoint le problème d'une poutre homogène qui présenterait, pour une même fréquence de résonance, le même nombre de nœuds que la poutre homogène, et dont le mouvement serait donné par une combinaison de termes en $\exp j\left(\omega t \pm K_o \frac{x}{L_o}\right)$. à coefficients constants, c'est-à-dire par une combinaison d'ondes planes. Deux modes homologues sur chaque structure ont alors même masse généralisée, même fréquence propre et même nombre de nœuds. Les structures ont également même densité modale et il suffit, grâce à A(35) ou A(37), de connaître la vitesse de groupe des ondes libres cheminant dans la poutre homogène, et la longueur L_o de cette poutre, pour connaître la densité modale (ou la vitesse locale de propagation de l'énergie $U(x,\omega)$) de la poutre non homogène. Cette vitesse de groupe peut être calculée en considérant **les conditions de propagation sur la poutre homogène indéfinie,** c'est-à-dire les solutions de la forme $\exp j\left(\omega t - K_o x\right)$ qui imposent, d'après A(17), la relation $\omega^2 = \frac{(EI)_o}{\rho_o} K_o^4$, K_o pouvant maintenant prendre toutes les valeurs possibles de 0 à l'infini puisque la structure est ici **indéfinie.**

On peut alors **généraliser** ces résultats, en considérant une propagation, toujours unidirectionnelle, dans une direction quelconque de l'espace délimité par une structure à deux ou trois dimensions, également non homogène.

Prenons pour cela un cas bidimensionnel et prenons comme référentiel le système d'axes rectangulaires coïncidant avec le système de coordonnées curvilignes locales de la structure (assimilée ici à sa surface moyenne).



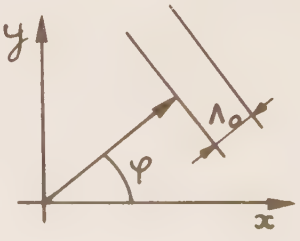
Nous supposons qu'il a été possible d'associer une structure de référence homogène à la structure réelle, et que la forme propre d'un mode de fréquence f peut être représentée asymptotiquement par :

$$Y_h(x,y) = W_o \cos\left[\frac{K_{ox}}{L_{ox}} x + \eta_x\right] \cos\left[\frac{K_{oy}}{L_{oy}} y + \eta_y\right]$$

L'indice h repérant le cas homogène, L_{ox} et L_{oy} désignant des dimensions caractéristiques que nous préciserons.

Le mouvement en chaque point peut alors être représenté par une combinaison d'exponentielles du type $\exp j\left(\omega t - \vec{K_o}\vec{M}\right)$ où $\vec{K_o}$ a les composantes $\left(\pm \frac{K_{ox}}{L_{ox}} \;,\; \pm \frac{K_{oy}}{L_{oy}}\right)$. K_{ox} et K_{oy} varient par valeurs entières multiples de π.

Pour un mode donné, on peut donc associer un vecteur $\vec{K_o}$ caractérisant une propagation dans la direction φ, avec la longueur d'onde $\Lambda_o = \frac{2\Lambda}{K_o}$. A la fréquence propre ω de ce mode, K_o est fonction de ω et de φ.



4,2. Plaque non homogène en flexion

Pour illustrer ce cas, prenons l'exemple des vibrations de flexion d'une plaque. Les solutions libres vérifient l'équation générale, valable en milieu non homogène :

A(46) $$\nabla^2 \left[D \nabla^2 w \right] - \bar{\rho} \omega^2 w = 0$$

avec $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $D = \frac{E h^3}{12 (1 - \gamma^2)}$. $\bar{\rho}$ = masse p.u. de surface

D et $\bar{\rho}$ sont supposés être fonction de x et de y .

Alors, les vibrations libres de la structure de référence homogène sont solutions de :

A(47) $$D_o \nabla^4 w_h - \bar{\rho}_o \omega^2 w_h = 0$$

et une solution de propagation dans ce milieu homogène (supposé indéfini) impose :

A(48) $$\omega^2 = \frac{D_o}{\bar{\rho}_o} k_o^4$$

si on a choisi :

A(49) $$w_h = \exp j \left(\omega t - \vec{k}_o \vec{M} \right)$$

En passant en variables réduites, les équations A(46) et A(47) peuvent s'écrire :

A(46bis) $$\frac{1}{\bar{\alpha}} \nabla^2 \left[\bar{\alpha} \nabla^2 w \right] - \left(k_o u' \right)^4 w = 0$$

A(47bis) $$\nabla^4 w_h - k_o^4 w_h = 0$$

après avoir posé

A(50) $$\frac{D}{D_o} = \bar{\alpha} \qquad \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_o} \frac{D_o}{D} = u'^4$$

On cherche alors une solution de A(46bis), valable pour la plaque non homogène, sous la forme :

A(51) $$w = W \exp j \left[\omega t - k_o v(x,y) \right] = W \exp j \left[\omega t - \vec{k}_o . \vec{V}(M) \right]$$

qui est bien du type A(49) dans le cas limite d'homogénéité, en prenant $\vec{V}(M) = \vec{M}$ et $W = W_o$

Pour cela, remarquons que l'opérateur $\nabla^2 \left[\bar{\alpha} \nabla^2 \right]$ dans A(46bis) peut s'écrire :

$$\nabla^2 \left[\bar{\alpha} \nabla^2 \right] = \nabla^2 \bar{\alpha} . \nabla^2 + \bar{\alpha} \nabla^4 + 2 \nabla \bar{\alpha} . \nabla \left(\nabla^2 \right)$$

expression dans laquelle le premier terme, appliqué à A(51), ne fait apparaître que des termes jusqu'à l'ordre k_o^2 que nous négligerons. Il vient donc en portant dans A(46bis)

A(52) $$\nabla^4 w + 2 \frac{\nabla \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} . \nabla \left(\nabla^2 w \right) - \left(k_o u' \right)^4 w = 0$$

Compte tenu de A(51), on a :

$$\nabla^2 w = \left\{ -k_o^2 W (\nabla v)^2 - j k_o \left(W \nabla^2 v + 2 \nabla W \nabla v \right) + \nabla^2 W \right\} \exp j(\omega t - k_o v)$$

En gardant seulement les termes de degrés 3 et 4 en k_o, il vient :

$$\exp -j(\omega t - k_o v)\, \nabla\left(\nabla^2 w\right) \simeq j k_o^3 W (\nabla v)^2 \nabla v$$

et

$$\exp -j(\omega t - k_o v) \cdot \nabla^4 w = k_o^4 W (\nabla v)^4 + 2 j k_o^3 \left\{ (\nabla v)^2 \cdot \nabla^2 v \cdot W + (\nabla v)^2 \nabla W \cdot \nabla v + \nabla \left[W (\nabla v)^2 \right] \nabla v \right\}$$

En reportant ces expressions dans A(52), il vient immédiatement :

$$(\nabla v)^4 = u'^4$$

A(53)

$$(\nabla v)^2 W \frac{\nabla \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} \cdot \nabla v + W (\nabla v)^2 \nabla^2 v + (\nabla v)^2 \nabla W \cdot \nabla v + \nabla \left(W (\nabla v)^2 \right) \cdot \nabla v = 0$$

et, compte tenu de la première de ces deux expressions, on peut écrire la seconde ligne sous la forme :

A(54)
$$\nabla^2 v + \left[2 \frac{\nabla W}{W} - 2 \frac{\nabla u'}{u'} + \frac{\nabla \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right] \cdot \nabla v = 0$$

où l'on a utilisé la première relation A(50).

La quantité entre crochets peut également s'exprimer par :

$$\frac{\nabla \left(\dfrac{\bar{\rho} W^2}{u'^2} \right)}{\dfrac{\bar{\rho} W^2}{u'^2}}$$

ce qui permet de mettre A(54) sous la forme définitive :

A(55)
$$\boxed{\nabla \left(\frac{\bar{\rho} W^2}{u'^2} \nabla v \right) = 0}$$

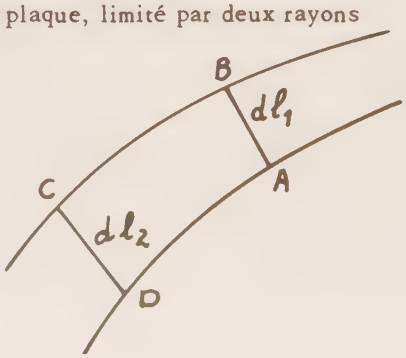
après avoir utilisé l'identité classique :

$$\nabla (a \nabla v) = \nabla a \cdot \nabla v + a \nabla^2 v$$

Autrement dit, **la divergence du vecteur** $\dfrac{\bar{\rho} W^2}{u'^2} \nabla v$ **est nulle.** En milieu homogène, ce vecteur possède la même direction que $\vec{k_o}$; il en résulte que $\dfrac{\bar{\rho} W^2}{u'^2 \bar{\rho}_o W_o^2}$ est le vecteur de **densité d'énergie,** et A(55) exprime que, si l'on considère un « tube » élémentaire sur la surface de la plaque, limité par deux rayons (au sens de l'optique géométrique) le flux d'énergie entrante est égal au flux d'énergie sortante. On a donc :

$$\oint_{ABCD} \left(\frac{\bar{\rho} W^2}{u'^2} \nabla v \right) \cdot dl = 0$$

et, comme aucune énergie ne franchit les segments curvilignes AD et BC, il vient :



$$\left[\frac{\bar{\rho} W^2}{u'^2} (\nabla v)_n \, dl\right]_{AB} = \left[\frac{\bar{\rho} W^2}{u'^2} (\nabla v)_n \, dl\right]_{CD}$$

où $(\nabla v)_n$ est la composante normale du gradient. On aboutit ainsi à la **loi d'évolution de l'amplitude W** de l'onde au cours de sa propagation.

REMARQUE :

Dans le calcul approché que nous venons de faire, il est intéressant de noter, en vue de la généralisation ultérieure, le mécanisme qui a permis d'obtenir la première relation A(53). Partant d'un opérateur différentiel dont le terme d'ordre le plus élevé est de la forme

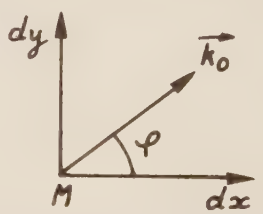
$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[a \frac{\partial^p}{\partial y^p}\right]$$

où a est fonction de point, les « conditions asymptotiques » du calcul amènent à tenir compte seulement du terme de plus haut degré en k_o, c'est-à-dire celui qui provient en réalité de l'opérateur $\frac{\partial^{n+p}}{\partial x^n \partial y^p}$ appliqué à l'expression de v sous la forme exp $j(\omega t - k_o v)$. (On néglige aussi la variation de l'amplitude). Il est alors clair que le terme en k_o^{n+p} s'écrit

$$a\left[(j k_o)^{n+p} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^n \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^p\right]$$

ce qui permet d'aboutir, sans aucun calcul, à la première relation A(53) à partir de A(46bis).

Nous allons maintenant calculer la densité modale de la plaque non homogène. Pour cela, plaçons nous en un point M de coordonnées (x, y) et considérons un élément de structure de côtés parallèles à Ox et à Oy et de longueur unité. Cet élément attaché au point M possède donc une aire unité. Calculons le nombre de nœuds par unité de longueur suivant chaque axe, pour le mode correspondant, sur la structure homogène de référence, à la direction de propagation du vecteur $\vec{k_o}$, d'angle φ



On a :

A(56)
$$\begin{cases} dm_x = 2\gamma_x = \frac{1}{\pi} k_o \frac{\partial v}{\partial x} \\ dm_y = 2\gamma_y = \frac{1}{\pi} k_o \frac{\partial v}{\partial y} \end{cases}$$

Appelant $\frac{\partial v}{\partial r}$ la dérivée de v dans la direction de propagation φ, on a immédiatement, d'après A(53)

$$\frac{\partial v}{\partial r} = u'$$

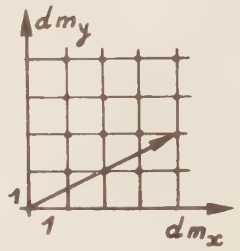
et, en posant

A(57)
$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos\varphi \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin\varphi \end{cases}$$

A(58)
$$\begin{cases} dm_x = \frac{k_{xo}}{\pi} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{k_{xo}}{\pi} u' \\ dm_y = \frac{k_{yo}}{\pi} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{k_{yo}}{\pi} u' \end{cases}$$

Alors, dans l'espace des vecteurs d'onde, le vecteur $\vec{dm}$ de composantes (dm_x, dm_y) est colinéaire au vecteur $\vec{k_o}$ et on a

A(59) $$(dm)^2 = \frac{k_o^2}{\pi^2} u'^2$$



et à chaque mode propre est associée une cellule élémentaire d'aire unité.
En utilisant A(48), il vient :

A(60) $$(dm)^2 = \left[\frac{\bar{\rho}_o}{D_o}\right]^{1/2} \frac{u'^2}{\pi^2} \omega$$

et les modes de fréquence inférieure à f sont donc représentés par des points du réseau (dm_x, dm_y) intérieurs au quart de cercle dont le carré du rayon est donné par A(60). Le nombre total de ces modes est égal à l'aire de ce quart de cercle puisque chaque cellule possède une aire unité. On a donc, en remplaçant u' dans A(60), par sa valeur A(50) :

A(61) $$\Delta N(M, f) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\bar{\rho}}{D}\right]^{1/2} \omega$$

et le nombre total de modes de fréquence inférieure à f, pour la structure non homogène complète Σ est

A(62) $$N(f) = \iint_{\Sigma} \Delta N(M,f)\, dx\, dy = \frac{\omega}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\bar{\rho}}{D}\right]^{1/2} dx\, dy$$

On en déduit la densité modale, indépendante de la fréquence :

A(63) $$\bar{n}(f) = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \left[\frac{\bar{\rho}}{D}\right]^{1/2} dx\, dy$$

ce qui donne bien, dans le cas homogène, le résultat classique

A(64) $$\bar{n}(f) = \frac{1}{2}\left[\frac{\bar{\rho}_o}{D_o}\right]^{1/2} L_{ox}\, L_{oy}$$

En comparant A(63) et A(64), les caractéristiques de la plaque homogène sont donc liées à celles de la plaque inhomogène par la relation intégrale :

A(65) $$\left[\frac{\bar{\rho}_o}{D_o}\right]^{1/2} L_{ox}\, L_{oy} = \iint_{\Sigma} \left[\frac{\rho}{D}\right]^{1/2} dx\, dy$$

Exemple

Considérons une plaque dont l'épaisseur varie suivant la direction OX avec la loi

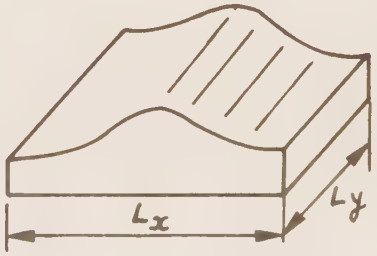
$$h(x,y) = h_1 \cos^2\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2}\right)\right]$$

On a $$\left[\frac{\bar{\rho}}{D}\right]^{1/2} = \left[\frac{12}{C_L^2 h^2}\right]^{1/2} = \frac{2\sqrt{3}}{C_L h_1}\left[\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{L_x} - \frac{1}{2}\right)\right]\right]^{-2}$$

Alors, A(65) donne après calculs :

A(66) $$\frac{A_o}{A} = \frac{4}{\pi}\frac{h_o}{h_1}$$

où l'on a posé $A_o = L_{ox} L_{oy}$, $A = L_x L_y$. h_o est l'épaisseur de la plaque homogène.



D'autre part, on a

$$M_T = \rho A \frac{h_1}{2}\left(1 + \frac{2}{\pi}\right)$$

et

$$M_{oT} = \rho A_o h_o$$

Si on impose $M_T = M_{oT}$, il vient la seconde relation

A(67) $$\frac{A_o}{A} = \frac{h_1}{h_o}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right)$$

A(66) et A(67) donnent alors :

$$\frac{h_o}{h_1} = \left(\frac{\pi+2}{8}\right)^{1/2} \qquad \frac{A_o}{A} = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\pi+2}{8}\right)^{1/2}$$

Alors, comme nous l'avons déjà montré dans le cas de la poutre non homogène, les masses généralisées sont égales pour les deux plaques (dans notre approximation) et ne dépendent pas de l'ordre du mode. En utilisant la forme propre A(45), on montre aisément que :

A(68) $$\boxed{\mu \simeq \frac{M_T}{4}}$$

4,3. Cas général

Le calcul précédent a une valeur générale pour les structures faiblement non homogènes quelconques, bi ou tridimensionnelles.

En bidimensionnel, quel que soit l'opérateur différentiel des forces élastiques, de la forme $\Sigma a_{ij} \frac{\partial^i}{\partial x^i} \frac{\partial^j}{\partial y^j}$ on se ramène toujours à la recherche de solutions de la forme A(51), conduisant à une expression du type A(54) soit

$$u' = g\left[\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^i \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^j\right]$$

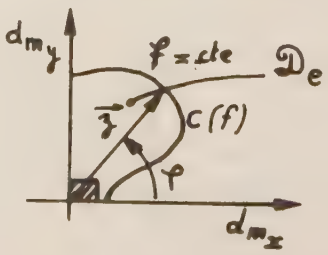
ou $$u' = g\left[\Sigma \cos^i\varphi \sin^j\varphi \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^{i+j}\right]$$

où $\frac{\partial v}{\partial r}$ dépend du point M. En général, pour une fréquence donnée, le nombre d'ondes k_o dépend de la direction φ de la propagation associée au mode considéré. Alors, la représentation du vecteur $\vec{z}(dm_x, dm_y)$ tel que :

A(59) $$\begin{cases} dm_x = \frac{k_{xo}}{\pi} \frac{\partial v}{\partial r} \\ dm_y = \frac{k_{yo}}{\pi} \frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

dans le plan (dm_x, dm_y), permet de calculer la densité modale, ainsi que sa distribution angulaire.

En effet, à fréquence constante, l'extrémité du vecteur $\vec{z}$ est maintenant située sur une courbe $C(f)$ délimitant, avec les axes, un domaine $\mathcal{D}J$ contenant tous les points représentatifs des modes de fréquence inférieure à f. Chacun des modes occupant une cellule d'aire unité, l'aire de ce domaine donne encore le nombre de modes de la structure d'aire unité attachée à un point courant M. On a donc :



A(69) $$\Delta N(f) = \iint_{D_\varphi} z \, dz \, d\varphi$$

avec

A(70) $$z = \frac{k_0(\varphi, f)}{\pi} \frac{\partial v}{\partial r} = \bar{z}(\varphi, f, M)$$

En faisant dans A(69) le changement de variables A(70), il vient

$$\Delta N(f) = \int_\varphi d\varphi \int_f \bar{z} \left| \frac{\partial \bar{z}}{\partial f} \right| df$$

ce qui veut dire que les modes de direction φ ont la distribution angulaire et fréquencielle :

A(71) $$\Delta \bar{n}'(\varphi, f, M) = 2\pi \bar{z} \left| \frac{\partial \bar{z}}{\partial \omega} \right|$$

La distribution angulaire de la densité modale pour l'ensemble de la structure vaut alors :

$$\bar{n}'(\varphi, f) = \iint_\Sigma \Delta n'(\varphi, f, M) \, d\Sigma$$

soit, en utilisant A(70) et A(71) :

A(72) $$\boxed{\bar{n}'(\varphi, f) = \frac{2}{\pi} \frac{k_0(\varphi, f)}{|V_{g_0}(\varphi, f)|} \iint_\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 dx \, dy}$$

En particulier, pour la structure homogène $\left(\frac{\partial v}{\partial r} = 1 \right)$

$$\bar{n}'(\varphi, f) = \frac{2A_0}{\pi} \frac{k_0(\varphi, f)}{|V_{g_0}(\varphi, f)|}$$

résultat déjà établi dans le chapitre II (formule II(20)).

On remarquera que A(72) peut encore s'écrire sous une forme analogue à A(37), c'est-à-dire mettant en évidence le lien entre densité modale et temps de propagation de l'énergie. En effet, en posant :

A(73) $$D(\varphi, f) = \frac{2}{\lambda_0(\varphi, f)} \iint_\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 dx \, dy$$

où $\lambda_0(\varphi, f) = \frac{2\pi}{k_0}$, il vient

A(74) $$\bar{n}'(\varphi, f) = 2 \frac{D(\varphi, f)}{|V_{g_0}(\varphi, f)|}$$

4,4. Choix de fonctions propres asymptotiques sinusoïdales

Nous avons montré au début de ce chapitre que, dans l'approximation des grandes valeurs de , les formes propres asymptotiques d'une poutre homogène s'exprimaient, quelles que soient les conditions aux limites, par des fonctions sinusoïdales. Nous avions alors remarqué que ce résultat pouvait être atteint, soit en faisant tendre k vers l'infini pour une poutre de longueur finie, soit en gardant k fini et en faisant tendre la longueur de la poutre vers l'infini.

Nous avons admis par la suite, en considérant le problème des vibrations libres asymptotiques de structures quelconques non homogènes, que cette propriété restait vraie dans les cas bi ou tridimensionnels. Nous avons donc représenté les déformées de rang élevé de la structure homogène de référence par des fonctions sinusoïdales.

Il est maintenant nécessaire de montrer que ce choix était bien légitime. Nous partons pour cela de l'équation générale du mouvement libre, dans un milieu bidimensionnel homogène, de la forme :

A(75) $$\mathcal{L}_M\, w + \bar{\rho}_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

où $\mathcal{L}_M$ est un opérateur différentiel à coefficients constants, portant sur les seules variables d'espace. Les solutions libres de cette équation, de la forme :

A(76) $$w(M,t) = w_0(M) \exp j\omega t$$

vérifient donc :

A(77) $$\mathcal{L}_M\, w_0 - \bar{\rho}_0 \omega^2 w_0 = 0$$

Cherchons des solutions $w_0(M)$ de A(77), nulles en dehors de l'étendue Σ de la structure, et vérifiant les conditions aux limites imposées à ce problème. Par transformation de Fourier de A(77), on a alors :

A(78) $$\left[D(k_x, k_y) - \omega^2 \right] W(k_x, k_y) = 0$$

après avoir posé :

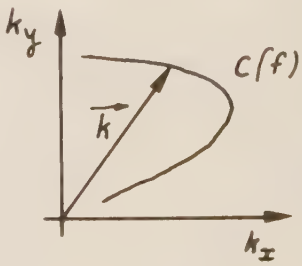
A(79) $$w_0(M) = R_e \left\{ \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} W(k_x, k_y) \exp j \vec{k}\vec{M}\, dk_x\, dk_y \right\}$$

$W(k_x, k_y)$ étant l'image de Fourier de $w_0(M)$, soit :

A(80) $$W(k_x, k_y) = \iint_{\Sigma} w_0(M') \exp -j \vec{k}\vec{M}'\, dM'$$

Autrement dit, en portant A(79) dans A(76), on cherche la solution générale du problème comme superposition d'ondes progressives de la forme $\exp j(\omega t - \vec{k}\vec{M})$, avec la distribution d'amplitude $W(k_x, k_y)$. La localisation de cette distribution dans l'espace des vecteurs d'ondes est précisée par A(78) : comme $W(k_x, k_y)$ n'est pas identiquement nul, on doit avoir :

A(81) $$\text{ou} \quad \begin{cases} \omega^2 = D(k_x, k_y) \\ k = \bar{k}(\varphi, \omega) \end{cases}$$



L'extrémité du vecteur $\vec{k}$ est donc située sur la courbe $C(f)$ d'équation A(81). Alors, $W(k_x, k_y)$ représente une distribution sur $C(f)$. En milieu indéfini, on peut prendre n'importe quelle distribution sur $C(f)$. (En tridimensionnel $C(f)$ désignerait une surface de l'espace (k_x, k_y, k_z)). Cela permet d'écrire la solution A(79) sous la forme :

$$w_0(M) = R_e \left\{ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} W_1(k, \varphi)\, \delta\left[k - \bar{k}(\varphi, \omega) \right] \exp\left[j \vec{k}\vec{M} \right] \cdot k\, dk\, d\varphi \right\}$$

après passage en coordonnées polaires et utilisation de A(81). On a donc

A(82) $$w_0(M) = R_e \left\{ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} W_2(\varphi, \omega) \exp j\left[\vec{k} \cdot \vec{M} \right] d\varphi \right\}$$

avec

A(83)
$$W_2(\varphi,\omega) = W_1\left[\bar{k}(\varphi,\omega),\varphi\right]\bar{k}(\varphi,f)$$
$$W_1(k,\varphi) = W(k\cos\varphi,\ k\sin\varphi)$$

Le choix de $W_2(\varphi,\omega)$ est arbitraire en milieu indéfini. En particulier, on peut prendre

A(84)
$$W_2(\varphi,\omega) = B\,\delta(\varphi-\varphi_1)$$

et A(82) représente alors la propagation d'une onde libre dans la direction $\varphi = \varphi_1$

En milieu de dimensions finies, comme on doit satisfaire les conditions aux limites, les relations A(80) et A(83) imposent la distribution particulière W_2 convenable. La solution A(82), qui vérifie alors l'équation A(77) et les conditions aux limites, représente une superposition d'ondes **cheminant dans tout l'espace indéfini,** et dont la somme est identiquement nulle en dehors de Σ.

Lorsque nous nous plaçons dans l'hypothèse de grands nombres d'ondes, nous avons vu que tout se passe comme si, pour une fréquence f donnée d'un mode propre, les dimensions de la structure devenaient infinies. Il devient alors légitime de choisir une distribution du type A(84) pour représenter le phénomène réel, c'est-à-dire de prendre pour formes propres asymptotiques une combinaison d'exponentielles, du type $\exp j\left(\vec{\bar{k}}(\varphi_1,\omega)\,\vec{M}\right)$, présentant, sur l'étendue Σ de la structure, le même nombre de nœuds que la forme propre réelle à la fréquence . Ceci conduit à choisir des déformées asymptotiques sinusoïdales représentées par :

A(85)
$$\omega_o(M) = \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{k_m x + \eta_x\right\}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\left\{k_n y + \eta_y\right\}$$

avec

A(86)
$$k_m = \frac{m\pi}{L_{ox}} \quad , \quad k_n = \frac{n\pi}{L_{oy}}$$

Alors, le vecteur $\vec{k}$ de coordonnées (k_m, k_n) a son extrémité sur $C(f)$. On peut ensuite associer à chaque mode propre asymptotique de la structure réelle un petit domaine (rappelant que la structure est de dimensions finies), de dimensions :

A(87)
$$\Delta k_x = \frac{\pi}{L_{ox}} \quad , \quad \Delta k_y = \frac{\pi}{L_{oy}}$$

et nous avons vu que cette schématisation permettait le passage du discontinu au continu dans la théorie de la densité modale d'une structure.

On peut alors, en examinant A(87), interpréter les dimensions L_{ox}, L_{oy} comme les demi-longueurs d'onde fondamentales suivant le système de coordonnées Ox, Oy .

REMARQUE :

En coordonnées cylindriques (et, en général, dans les systèmes présentant une symétrie de révolution), on doit prendre garde à la définition de L_{oy}. En effet, on est amené à prendre des formes propres asymptotiques du type

$$\sin\frac{m\pi x}{L_{ox}}\ \cos n\theta$$

Dans le système de coordonnées curvilignes orthogonales attaché à la surface moyenne du cylindre circulaire de rayon a, on a $\theta = \frac{y}{a}$ et la forme propre asymptotique peut s'écrire :

$$\sin\frac{m\pi x}{L_{ox}}\ \sin\frac{n\pi y}{\pi a}$$

ce qui impose donc $L_{oy} = \pi a$ *(demi-périmètre du cylindre). Dans ce cas de dégénérescence, tout se passe donc comme si on était en présence d'un demi-cylindre.*

Manuscrit remis le 3 avril 1973.

5. CONCLUSION

Les résultats obtenus dans ce chapitre permettent d'étendre le champ d'application de la notion de densité modale d'une structure aux cas de structures non homogènes. L'hypothèse fondamentale de cette extension consiste à supposer qu'il n'existe pas d'hétérogénéités concentrées, soit au niveau des caractéristiques élastiques ou massiques du matériau, soit au niveau de la géométrie de la structure. D'une façon plus précise, on peut dire que le calcul qui a été présenté est valable lorsque la variation des coefficients de l'opérateur différentiel du mouvement est négligeable **à l'échelle de la longueur d'onde** des vibrations considérées ou encore à l'échelle de l'écart entre deux nœuds consécutifs des modes étudiés. De ce point de vue, le fait de parler de «conditions asymptotiques» est donc critiquable puisque la théorie approchée n'est plus utilisable en deça d'une certaine longueur d'onde limite. Remarquons également au passage que, dans le cas de structures parfaitement homogènes, l'idéalisation du comportement de la structure qui conduit aux équations du mouvement est également valable pour une certaine gamme de longueurs d'ondes : la théorie des coques ou plaques minces doit céder le pas à des représentations plus précises quand la longueur d'onde devient de l'ordre de 5 à 6 fois l'épaisseur.

Cette limitation ne semble toutefois pas sévère dans le problème qui nous intéresse principalement ici et les résultats obtenus permettent de traiter correctement un grand nombre de cas d'importance pratique. D'autre part, le lien qui a été établi entre densité modale et temps de propagation de l'énergie peut laisser supposer qu'il existe une possibilité de généralisation complète du concept de densité modale, en termes purement énergétiques, c'est-à-dire ignorant les limitations de chaque théorie simplifiée du problème. De plus amples recherches dans cette direction pourraient se révéler intéressantes.

*

RÉFÉRENCES

[1] POWELL A. - *On the response of structures to random pressures and to jet noise in particular.* Random Vibration, vol. 1, chap. 8. Ed. Crandall MIT Press Cambridge (1958).

[2] CRANDALL S. et al. - Random Vibration, vol. 1 et 2. MIT Press Cambridge (1958 et 1962).

[3] LIN Y.K. - *Probabilistic theory of structural dynamics.* Mc Graw Hill Book Company (1967).

[4] SMITH P.W. Jr. - *Response and radiation of structural modes excited by sound.* JASA, 34,5, 640 (1962).

[5] LYON R.H. and MAIDANIK G. - *Power flow between linearly coupled oscillators.* JASA 34,5, 623 (1962).

[6] MAIDANIK G. - *Response of ribbed panels to reverberant acoustic field.* JASA 34,6, 809 (1962).

[7] SMITH P.W. and LYON R.H. - *Sound and structural vibration.* NASA CR-160, March 1965.

[8] NEWLAND D.E. - *Power flow between a class of coupled oscillators.* JASA 43,4, 553 (1968).

[9] SCHARTON T.D. and LYON R.H. - *Power flow and energy sharing in random vibrations.* JASA 43,6, 1332 (1968).

[10] FAHY F.J. - *Vibration of containing structures by sound in the contained fluid.* Journal of Sound and Vibration, vol. 10 n° 3 (1969).

[11] DYER I. - *Response of space vehicle structures to rocket engine noise.* Random Vibration, vol. 2, chap. 7. Ed. S. Crandall MIT Press Cambridge (1963), p. 177.

[12] HECKL M. - *Vibrations of point-driven cylindrical shells.* JASA 34,10, 1553 (1962).

[13] BOLOTIN W.W. - *On the density of the distribution of natural frequencies of thin elastic shells.* PMM, vol. 27 n° 2 (1963).

[14] BOURGINE A. - *Sur une méthode nouvelle de caractérisation des structures.* C.R. Ac. Sc. t. 264-A (1967), p. 556-557.

[15] BOURGINE A. - *Méthodes de calcul de la réponse d'une structure soumise à un environnement aléatoire.* La Rech. Aérosp. n° 1970-6.

[16] MORSE P.M. - *Vibration and sound.* Mc Graw Hill Book Company (1936).

[17] CASTAING R. - *Thermodynamique statistique.* Masson Editeur (1970).

[18] COUPRY G. - *Sur les vibrations de respiration des coques minces. Application aux propulseurs à combustible solide.* Publication ONERA n° 110 (1964).

[19] BLANC-LAPIERRE A et FORTET R. - *Théorie des fonctions aléatoires.* Masson, Paris (1953).

[20] PAPOULIS A. - *Probability, random variables and stochastic processes.* Mc Graw Hill Book Company, New-York (1965).

[21] MAZET R. - *Mécanique vibratoire.* Librairie Polytechnique Béranger, Paris et Liège (1965).

[22] BENDAT J.S. et PIERSOL A.G. - *Measurement and analysis of random data.* John Wiley, New-York (1966).

[23] COURANT R. et HILBERT D. - *Methods of mathematical physics. Vol. I.* Interscience publishers Inc. New-York (1953).

[24] ANGOT A. - *Compléments de mathématiques.* Ed. de la Revue d'Optique (1949).

[25] WATSON G.N. - *Theory of Bessel functions.* Cambridge University Press (1952).

[26] COUPRY G. - *Prévision de la variation des modes consécutive à la modification d'une structure.* La Recherche Aérospatiale nº 1973-3.

[27] GERMOGENOVA O.A. - *Formalism of geometrical optics for flexure waves.* JASA 49,3, 776 (1971).

[28] BRILLOUIN L. - *Wave propagation and group velocity.* Academic Press, New York and London (1960).

[29] BIOT M.A. - *General theorems on the equivalence of group velocity and energy transport.* Physical Review, 105 nº 4, February 1957.

[30] CRIGHTON D.G. and FFOWCS WILLIAMS J.E. - *Real space-time Green's functions applied to plate vibration induced by turbulent flow.* Dept. of Mathematics, Imperial College, London (1969).

[31] SKUDRZYK E.J., KAUTZ B.R. and GREENE D.C. - *Vibration of, and bending-wave propagation in plates.* JASA, vol. 33 nº 1 (1961), p. 36-45.

[32] MILLER D.K. and HART F.D. - *Modal density of thin circular cylinders.* NASA CR 897 (1967).

[33] SZECHENYI E. - *Sound radiation and transmission into unstiffered cylinders.* ISVR Technical Report nº 38, Oct. 1970).

[34] NEMAT-NASSER S. - *On the response of shallow thin shells to random excitations.* AIAA Journal, vol. 6 nº 7, July 1968.

[35] STEARN S.M. - *Measurement of correlation coefficients of acceleration on a randomly excited structure.* Journal of Sound and Vibration, vol. 9 nº 1 January 1969.

Achevé d'imprimer à l'ONERA, octobre 1973 - Dépôt légal, 4^{e} trimestre 1973 - nº 449.

1134

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

PERMIS D'IMPRIMER

Doctorat d'ETAT

Thèse de SCIENCES PHYSIQUES

Nom BOURGINE

Prénoms Alain

Date et lieu de naissance 20 Décembre 1937 à CLICHY (Hauts de Seine)

SUJET :

Thèse : " Sur une approche statistique de la dynamique vibratoire des structures"

Vu et approuvé :

Orsay, le 15 Mai 1973

Le Vice-Président du Centre d'Orsay :